UNIDAD 4
COMPORTAMIENTO GRÁFICO Y PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Propósitos: Analizar las relaciones existentes entre la gráfica de una función y sus derivadas para obtener información sobre el comportamiento de la función, utilizar dicha información para resolver problemas de optimización.

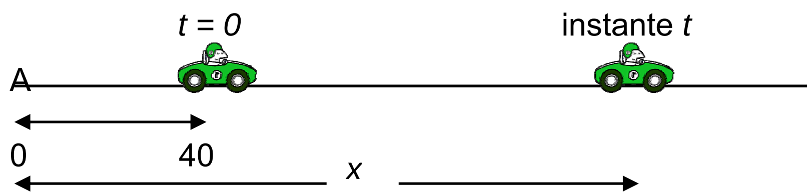
Aprendizajes. Al finalizar el alumno:

- Determina gráfica y algebraicamente los intervalos en donde una función es creciente o decreciente.
- Bosqueja la gráfica de la derivada de una función dada la gráfica de la misma.
- Determina los puntos críticos de una función y los clasifica en máximos o mínimos.
- Grafica una función analizando la información que proporciona su primera derivada.
- Analiza el tipo de concavidad de la función a partir del signo de la segunda derivada.
- Grafica una función analizando la información que proporcionan su primera y segunda derivada.
- Determina los puntos críticos de una función y los clasifica en máximos, mínimos o inflexiones usando el criterio de la segunda derivada.
- Resolver problemas que involucren máximos y mínimos de una función.

Introducción.

En la unidad 2, vimos diferentes situaciones que se modelan con funciones polinomiales de 1°, 2° y 3° grado. Para apreciar el poder del Cálculo como una herramienta, iniciaremos esta unidad con la graficación de funciones y su aplicación a la solución de problemas de optimización, razón por la cual necesitamos precisar algunos conceptos como; función creciente, función decreciente, concavidad hacia arriba, concavidad hacia abajo, entre otras.

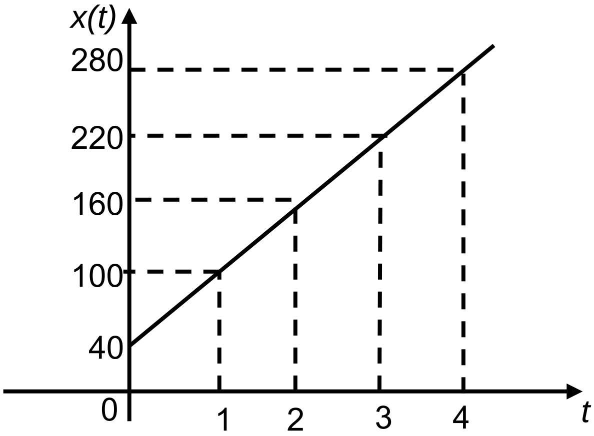
Empecemos con un problema de un automóvil con velocidad constante. Un automóvil viaja con una velocidad constante de 60 m/seg. En el momento en que empezamos a medir el tiempo t (t = 0), el automóvil se encuentra a 40 metros de la derecha de un punto de referencia A sobre la carretera, tal y como se muestra en la figura.



Si $x(t)$ es la posición del automóvil correspondiente al tiempo t, podemos escribir

$$x(t) = 40 + 60t$$

El coeficiente 60 indica la razón a la que aumenta la posición con respecto al tiempo, cuyo valor coincide con la pendiente de la recta dada por la función lineal $x(t) = 40 + 60t$.



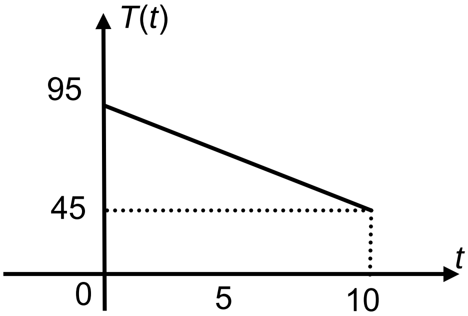
Fijemos las siguientes ideas, la razón de cambio, en este caso la pendiente, es de 60 m/seg y su posición inicial $x = x(0) = 40$ m, que representa la ordenada al origen, nos proporciona una gráfica como se ve en la figura anterior.

Observa que cuando el tiempo t aumenta, el automóvil recorre una mayor distancia $x(t)$. En general, si la variable independiente aumenta y la variable dependiente lo hace también, decimos que la gráfica de $x = x(t)$ asciende cuando t aumenta de valor y la función x es una **función creciente**.

Problema de la taza de café. Una taza de café se calienta hasta que alcanza una temperatura de 95°. La taza se expone al medio ambiente el cual se encuentra a una temperatura de 25° C. Supongamos que en los primeros 10 minutos la temperatura de la taza de café disminuye uniformemente a razón de 5° C por minuto. La fórmula encontrada para la temperatura T de la taza de café a los t minutos está dada por:

$$T(t) = 95 - 5t$$

A continuación te mostramos la gráfica de la temperatura con respecto al tiempo.



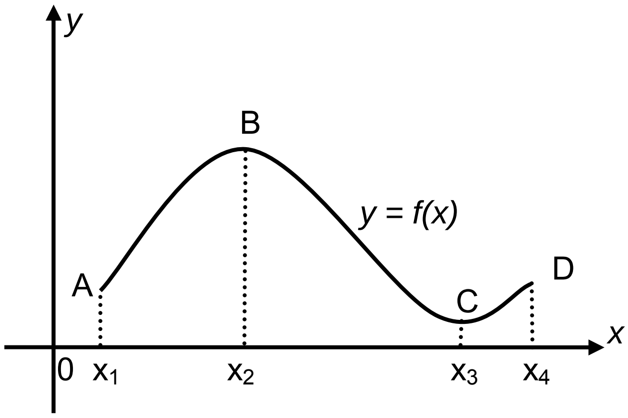
Como $T = T(t)$ disminuye a medida que t aumenta, decimos que T es una **función decreciente**.

Con los elementos de los ejemplos dados anteriormente, podemos construir una definición de función creciente y función decreciente.

- **Una función *f* es creciente si los valores de *y* = *f*(*x*) aumentan a medida que *x* aumenta.**
- **Una función *f* es decreciente si los valores de *y* = *f*(*x*) disminuyen a medida que *x* aumenta.**
- **La gráfica de una función *creciente* sube al recorrerla de izquierda a derecha.**
- **La gráfica de una función *decreciente* baja al recorrerla de izquierda a derecha.**

Actividad 1.

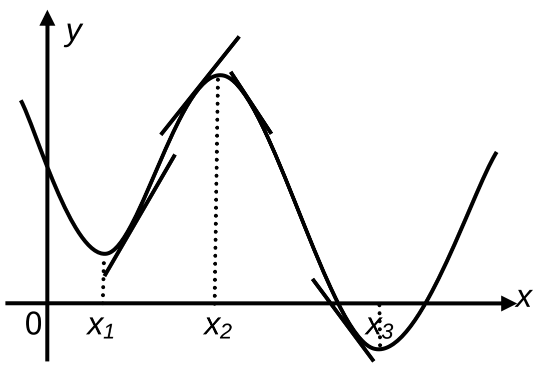
1. Determina, con base en la gráfica de la función, en qué intervalos $y = f(x)$ es creciente y en qué intervalos decreciente.
   a) (x_1,x_2).
   b) (x_2,x_3).
   c) (x_3,x_4).



Al observar la gráfica de una función se aprecia inmediatamente dónde es creciente y dónde es decreciente. El verdadero reto consiste en contestar lo anterior si únicamente tenemos la regla de correspondencia de la función. Por ejemplo, ¿podrías determinar los intervalos en donde es creciente y en donde es decreciente, sin hacer la gráfica, la función $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$?

Con respecto a las gráficas del problema del automóvil y el de la taza de café, representadas por dos rectas, observa que la primera tiene pendiente 60 y es creciente, y la segunda tiene pendiente –5 y es decreciente. En general, en el caso lineal la derivada de la función, o razón de cambio instantáneo, es una constante y su signo nos indica si la función crece o decrece.

2. Con base en la figura contesta lo siguiente:
   a) En el intervalo (x_1,x_2) la función tiene rectas tangentes con pendiente: ____________; y en (x_1,x_2) la función es: ___________
   b) En el intervalo (x_2,x_3) la función tiene rectas tangentes con pendiente ____________; y en (x_2,x_3) la función es: _____________

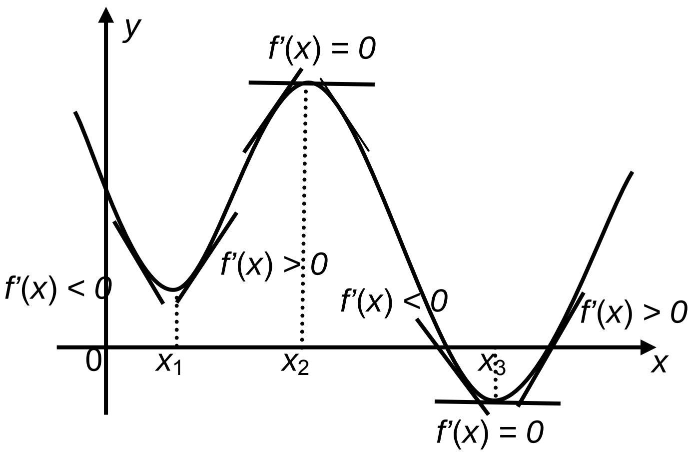


Si contestaste correctamente habrás observado que en los intervalos en los que f es creciente, todas las rectas tangentes tienen pendiente positiva, mientras que en los intervalos en los que f es decreciente, todas las rectas tangentes tienen pendiente negativa. Como recordarás, la pendiente de la recta tangente en un punto está dada por el valor de la derivada en ese punto. De modo que el hecho de ser una función creciente o decreciente parece estar relacionado con el signo de su derivada en ese intervalo, y en efecto, así es, Este hecho lo enunciamos a continuación.

Teorema 1. Una función $f(x)$ es **creciente** sobre cualquier intervalo en el que $f'(x) > 0$, y es **decreciente** sobre cualquier intervalo en el que $f'(x) < 0$.

Este teorema es geométricamente evidente si tenemos en cuenta el hecho de que una línea es creciente si su pendiente es positiva y decreciente si su pendiente es negativa, lo cual puedes comprobarlo observando la figura anterior.

Es claro que la gráfica de una función f puede presentar intervalos en donde es creciente ($f' > 0$) e intervalos en donde es decreciente ($f' < 0$), pero ¿qué sucede en el punto de transición de $f' > 0$ a $f' < 0$ (o viceversa)? La respuesta es que, en el punto de cambio de signo, la recta tangente es horizontal y su pendiente, es decir, la derivada de la función es cero ($f' = 0$), lo cual también geométricamente es evidente y lo puedes observar en la siguiente gráfica.



Números críticos

Por lo anterior es muy importante encontrar los valores o números en donde una función tiene derivada igual a cero, por lo que reciben un nombre especial que daremos en la siguiente definición.

- **Un número *c* en el dominio de una función *f* se llama *número critico* de *f*, si $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe.**

Con base en la anterior definición vamos a determinar dónde crece y dónde decrece la función $f(x) = x^3 - 3x^2$.

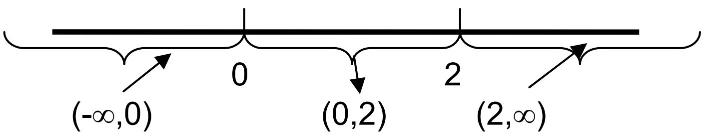
Derivamos y después encontramos los números críticos de la función igualando la derivada a cero y resolviendo la ecuación que resulta:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$3x^2 - 6x = 0$$
$$3x(x - 2) = 0$$

Por lo tanto, los números críticos son: $x = 0$ y $x = 2$. Estos valores son muy importantes porque, recuerda, son las abscisas de los puntos de transición entre creciente y decreciente o viceversa.

El hecho de factorizar la derivada también facilita su análisis. Veamos: dividimos la recta real en tres intervalos cuyos puntos extremos sean los números críticos, en este caso: 0 y 2. Analizamos el signo de cada factor para que, de acuerdo al teorema 1, determinemos los signos de la derivada en cada intervalo, para concluir si en cada uno de ellos la función es creciente o decreciente, y sintetizamos nuestro trabajo con la siguiente gráfica y una tabla:

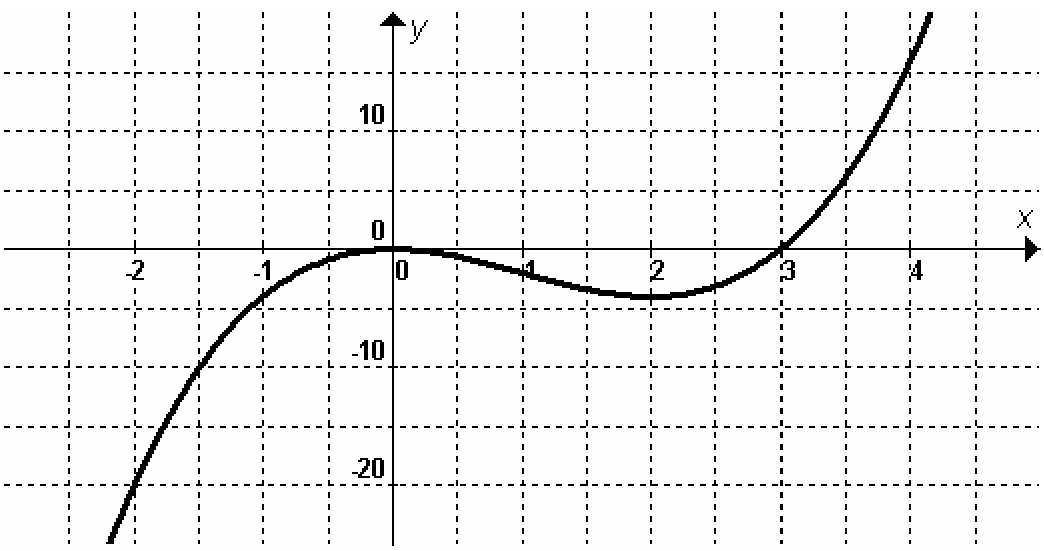


Intervalo	$3x$	$x - 2$	$f'(x)$	Comportamiento de f
$(-\infty,0)$	–	–	+	Creciente
$(0,2)$	+	–	–	Decreciente
$(2,\infty)$	+	+	+	Creciente

En cada intervalo se puede escoger un *valor prueba* que sea *cómodo* para solamente apreciar el signo de la derivada sin necesariamente evaluarla.

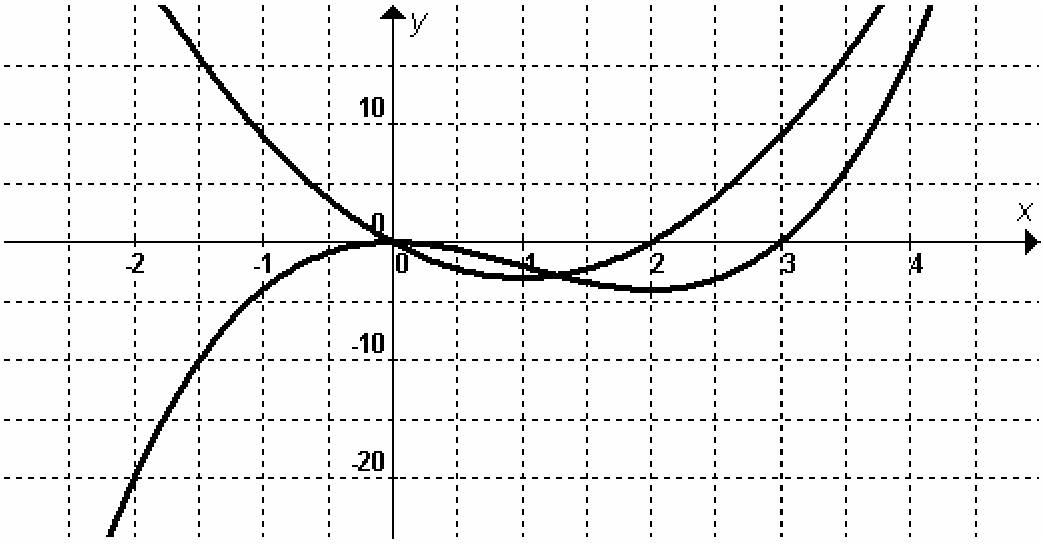
Observamos que en la última columna se da la conclusión del comportamiento de la función en el intervalo correspondiente. Por ejemplo, $f'(x) < 0$ en el intervalo abierto $(0,2)$, por lo que f es decreciente en ese intervalo. En el dibujo de arriba hemos colocado debajo del intervalo una flecha hacia abajo que nos indica ese hecho. Análogamente se han colocado las otras flechas.

La gráfica de f se muestra en la gráfica de la función, con la que podemos confirmar geométricamente nuestras conclusiones:



En la figura de abajo, hemos representado tanto a la gráfica de $y = f(x)$ como a la gráfica de $y = f'(x)$. Observa la relación entre las dos gráficas.

En los intervalos $(-\infty,0)$ y $(2,\infty)$ la función f es creciente por lo que $f'(x) > 0$ (la gráfica de la función f' tiene imágenes positivas, es decir arriba del eje x). En el intervalo $(0,2)$ la función f es decreciente, así $f'(x) < 0$ (la gráfica de la función f' se encuentra abajo del eje x, es negativa). Cuando la derivada es cero, su gráfica intersecta al eje x, justamente en los valores críticos.

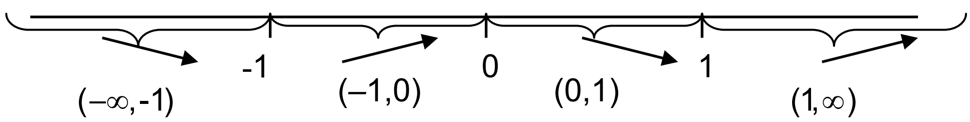


Ahora, vamos a determinar en qué intervalos $f(x) = x^4 - 2x^2$ es creciente y en cuáles decreciente.

Al igual que en el ejemplo anterior, primero derivamos a la función, después la igualamos a cero y resolvemos la ecuación que resulta:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$
$$4x(x^2 - 1) = 0$$
$$4x(x - 1)(x + 1) = 0$$

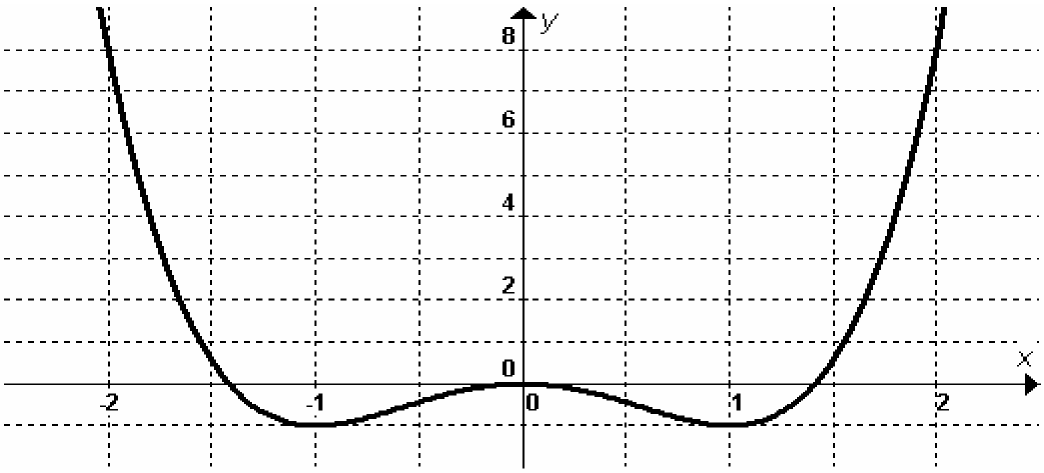
Por lo tanto: $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$ son los números críticos. Con base en ellos, dividimos al eje real en cuatro intervalos



Ahora, resumimos en una tabla el análisis del signo de la derivada en cada intervalo.

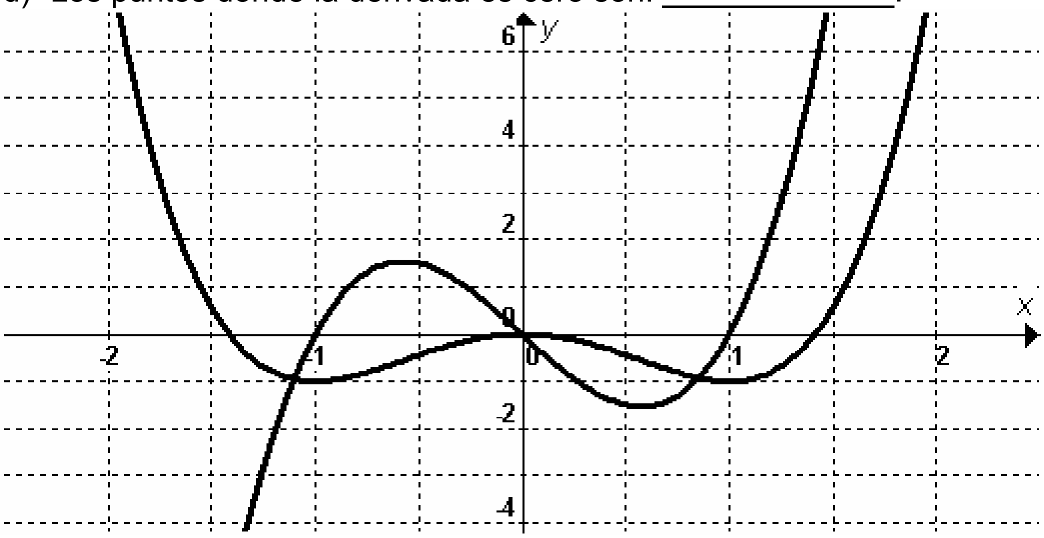
Intervalo	$4x$	$x^2 - 1$	$f'(x)$	*Comportamiento de f*
$(-\infty,-1)$	–	+	–	Decreciente
$(-1,0)$	–	–	+	Creciente
$(0,1)$	+	–	–	Decreciente
$(1,\infty)$	+	+	+	Creciente

La gráfica de f se muestra a continuación.



Actividad 2.

1. En la figura de abajo, hemos representado las gráficas de las funciones $y = f(x)$ y $y' = f'(x)$. Observa la relación entre las dos gráficas y completa los siguientes enunciados.
   a) Marca de color rojo la gráfica de la derivada.
   b) En los intervalos (–∞,–1) y (0,1) la función *f* es______________, la gráfica de la función *f'* se encuentra _____________ del eje *x*.
   c) En los intervalos (–1,0) y (1,∞) la función *f* es: _____________, la gráfica de la función *f'* se encuentra ________ del eje *x*.
   d) Los puntos donde la derivada es cero son: ______________.



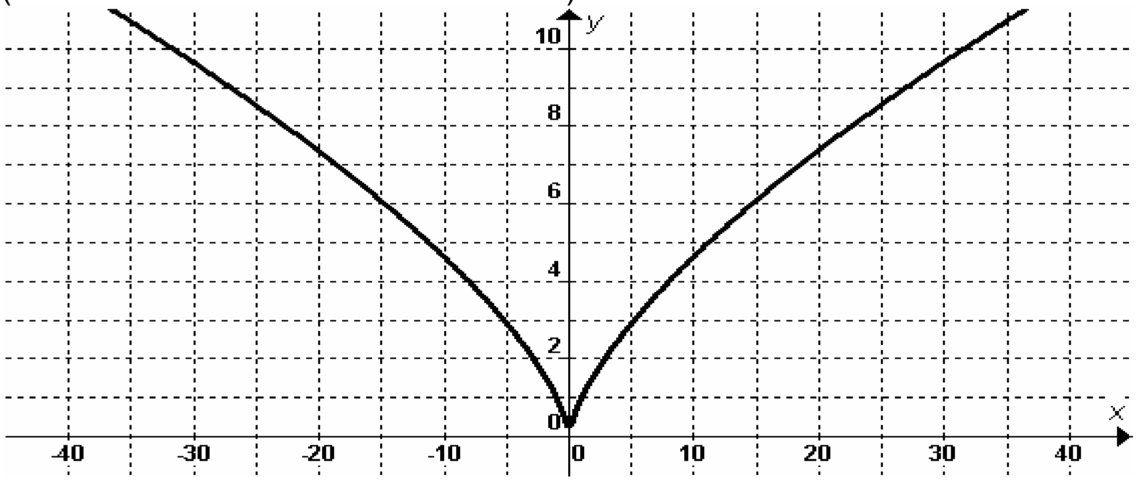
2. Considera la función $f(x) = x^{2/3}$. Determina sus números críticos.

Para determinar los números críticos de la función derívala, iguala a cero la derivada y resuelve la ecuación resultante.

Comprueba que el resultado que obtuviste fue el siguiente:

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0$$

Claramente, $x = 0$ no pertenece al dominio de $f'(x)$. La evidencia geométrica se encuentra en la gráfica de $f(x) = x^{2/3}$, la cual nos muestra que en el origen la función tiene un pico y que la tangente se hace vertical en ese punto, es decir, la derivada no existe para x = 0, por lo que este valor es el número crítico (consulta la definición de número crítico).

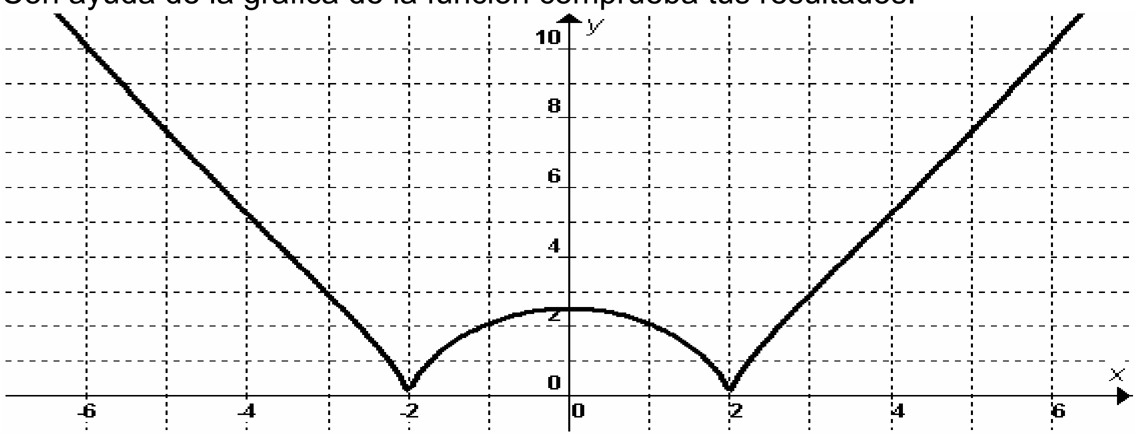


3. Determina los intervalos en donde $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$ es creciente o decreciente.
   a) Comprueba que la derivad de la función, simplificada e igualada a cero nos queda:
   $$\frac{4x}{3(x^2-4)^{1/3}} = 0$$
   b) ¿Para qué valores de x se resuelve la ecuación?
   c) ¿Para qué valores de x no está definida f'?
   d) Completa la siguiente tabla, la cual se ha construido con base en los valores de los números críticos: $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$.

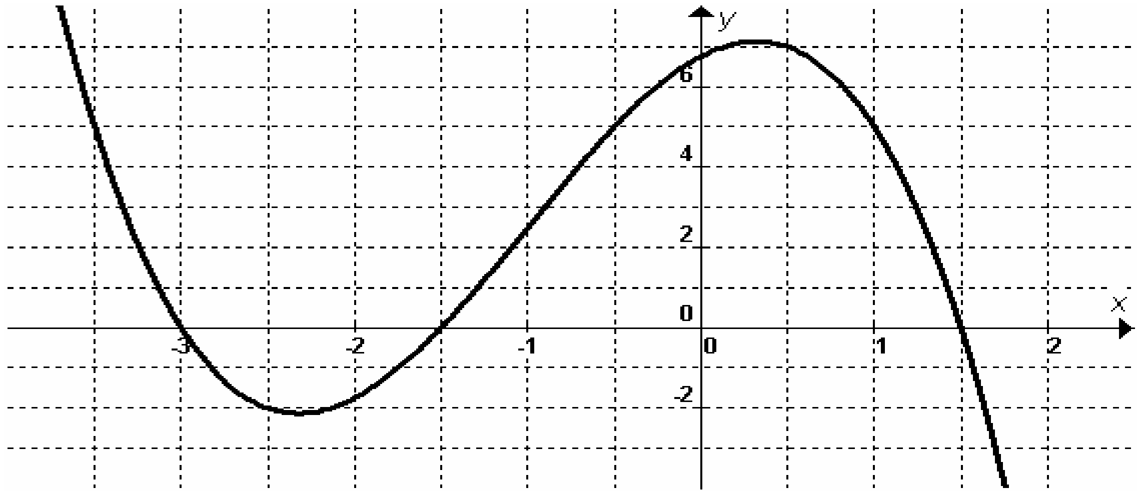
Intervalo	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Valor prueba	$x = -3$	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
Signo de $f'(x)$			–	
Conclusión	Decreciente	Creciente		

Recuerda que los valores prueba de la tabla se escogen a nuestra conveniencia, podían haberse usado otros, pues sólo es necesario evaluar $f'(x)$ en los valores prueba para conocer su signo. Por ejemplo, podemos determinar que $f'(-3)$ es negativo como sigue:
$$f'(-3) = \frac{4(-3)}{3\left[(-3)^2 - 4\right]^{\frac{1}{3}}} = \frac{\text{negativo}}{\text{positivo}} = \text{negativo}$$

Con ayuda de la gráfica de la función comprueba tus resultados.



4. Determina los intervalos donde la función f es creciente y en los que es decreciente. Traza las gráficas de f y f'.
   a) $f(x) = x^2 + 5x + 1$ b) $f(x) = -x^2 + 4x + 2$
   c) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ d) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$
5. De cada uno de los incisos dibuja una gráfica de una función con las propiedades dadas.
   a) $f(0) = 1$; $f(2) = 5$; $f'(x) < 0$, cuando $x < 0$ y $x > 2$; $f'(x) > 0$ para $0 < x < 2$.
   b) $f'(-5) = 0$; $f'(0) = 0$; $f'(5) = 0$; $f'(x) \leq 0$ para $-5 < x < 5$; $f'(x) > 0$ si x está en el intervalo $(-\infty,-5)$ y si $x \in (5,\infty)$.
6. Dibuja la gráfica de f' a partir de la gráfica de f dada.



Máximos y mínimos. Criterio de la primera derivada.
En varias ocasiones y particularmente en la Unidad 3, hemos estado interesados en determinar los valores máximos o mínimos que toma una función. En términos generales, esta clase de problemas se describen como el problema de encontrar los *valores extremos* de una función. Estos extremos corresponden a los puntos más alto y más bajo de la gráfica de una función, y hemos visto que una herramienta para localizarlos, es; la derivada de la función.

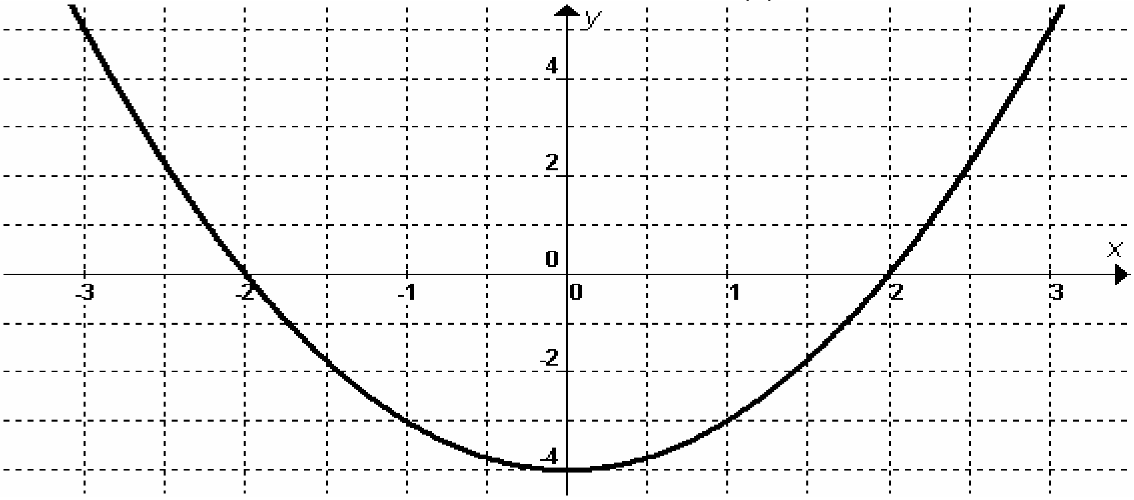
Comenzamos por definir algunos términos básicos.

- **Para una función f definida en un conjunto D de números reales, y un número $c \in D$**
  1. $f(c)$ es el máximo absoluto de f en D si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en D, y
  2. $f(c)$ es el mínimo absoluto de f en D si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en D.
- **A un máximo o a un mínimo absoluto se le llama extremo absoluto.**
- **Si una función tiene varios extremos absolutos, nos referimos a éstos simplemente como extremos.**
- **Los máximos y mínimos absolutos se llaman también máximos y mínimos globales, respectivamente.**

Ahora, pasemos a aplicar las definiciones anteriores.

Actividad 3.
Con la ayuda de las gráficas de las funciones indicadas vamos a responder lo que se pide.

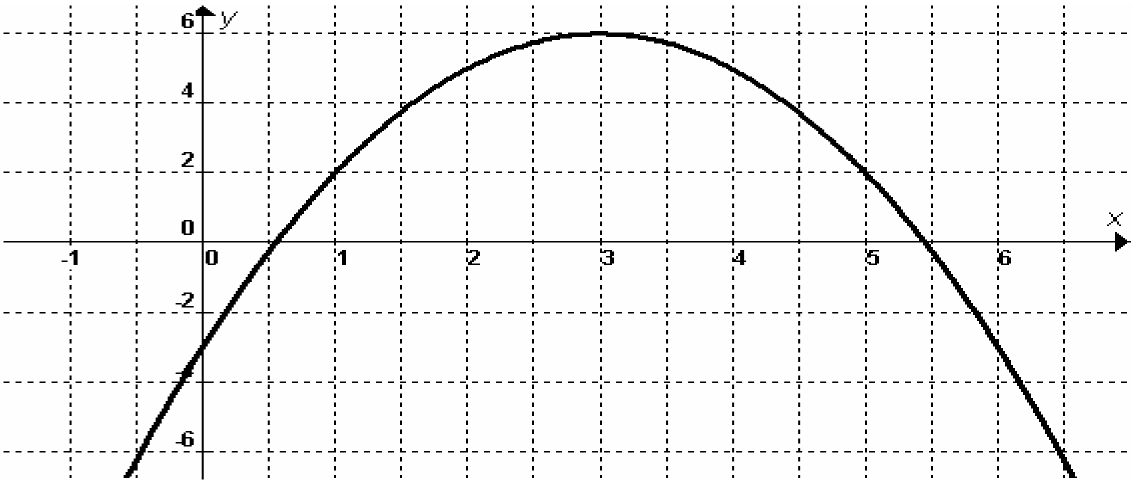
1. Determina los extremos absolutos de la función $f(x) = x^2 - 4$ en su dominio.



Los extremos absolutos son los máximos o mínimos absolutos. La función tiene un mínimo absoluto, escríbelo: _________.

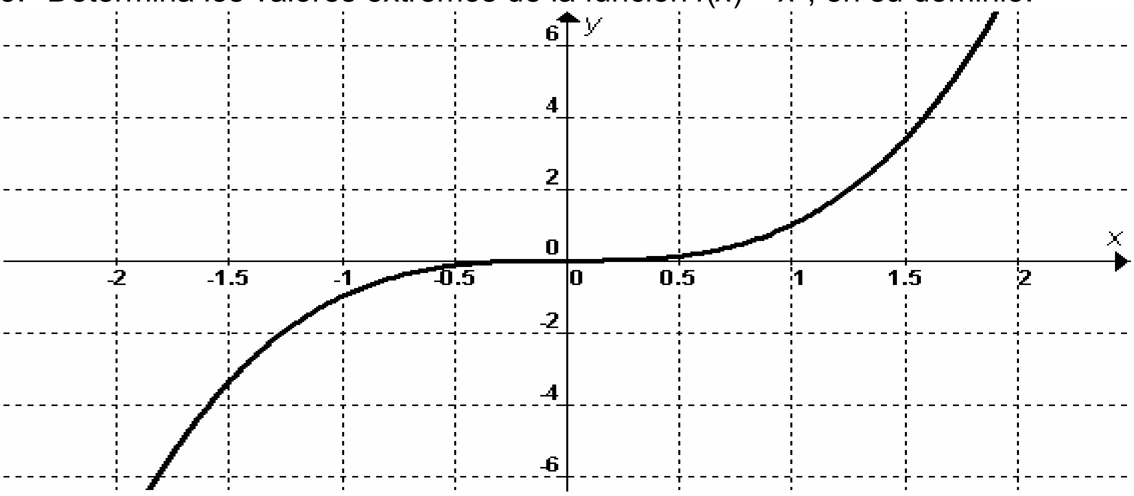
¿Tendrá máximos absolutos? Si bien todos lo valores que toma la función no están graficados, por tu conocimiento de las parábolas sabes que la función: ________________ máximos absolutos.

2. Determina los extremos absolutos de la función $f(x) = -x^2 + 6x - 3$ en su dominio.

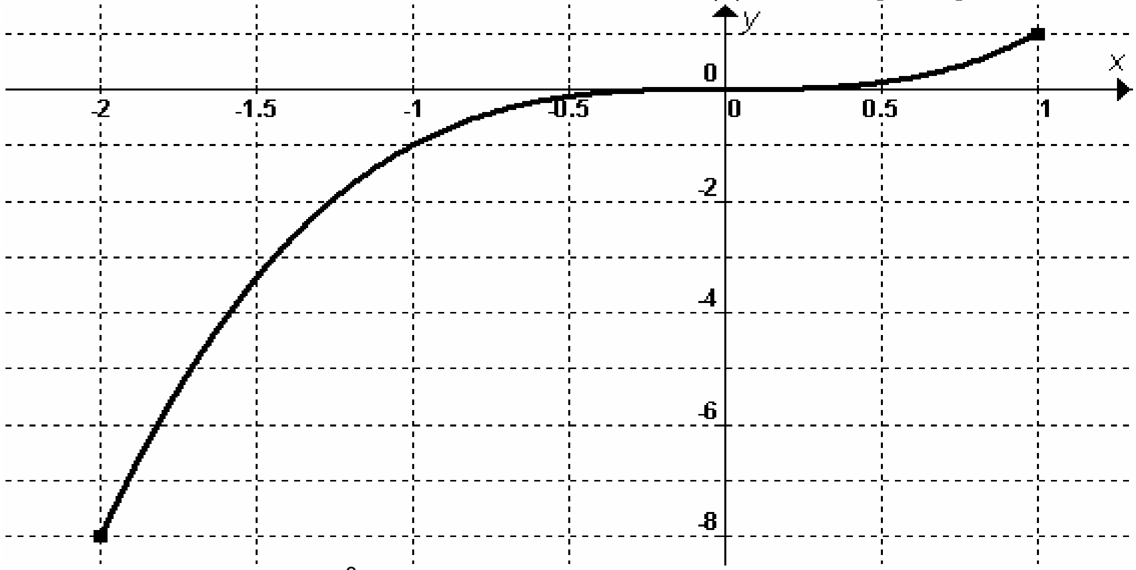


La función tiene como máximo absoluto: _____________ y _______________ mínimo absoluto.

3. Determina los valores extremos de la función $f(x) = x^3$, en su dominio.



4. Determina los valores extremos de la función $f(x) = x^3$, $x \in [-2, 1]$.



5. ¿La función $f(x) = x^3$, tendrá valores extremos absolutos en $(-2,1)$? ¿Por qué?
   Para resolverlo analiza que tipo de intervalo es el $(-2,1)$.

En los dos primeros problemas tratamos con funciones que son parábolas y su dominio son los reales. La primera sólo tiene un mínimo absoluto en $f(0) = -4$ y la segunda un máximo absoluto en $f(3) = 6$. En las tres funciones restantes las funciones cúbicas y sus dominios son diferentes. La primera de ellas, con dominio en los reales no tiene extremos absolutos. En la segunda función cúbica los valores extremos se encuentran en $x = -2$ y $x = 1$, $f(-2)= -8$ es un valor mínimo absoluto y $f(1) = 1$ es un valor máximo absoluto. Finalmente, en la última función pudiste observar que no tiene extremos absolutos.

6. ¿Dada una función f, si el punto $(a, f(a))$ es el más alto, o el más bajo, que aparece en la gráfica de la función, entonces podríamos asegurar que la derivada en ese punto debe ser igual a cero? En otras palabras, ¿si $f(a)$ es un valor extremo absoluto entonces $f'(a) = 0$?

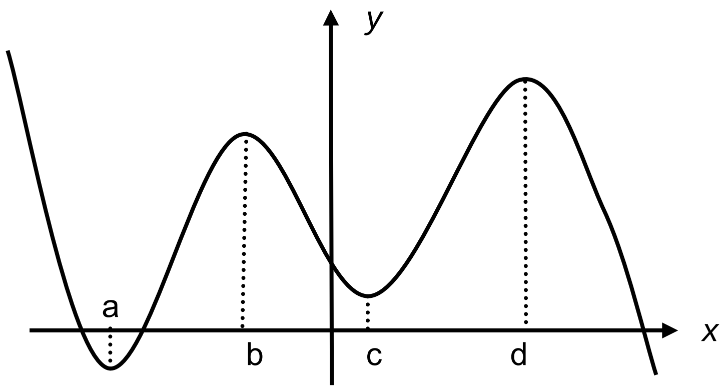
Nuestro objetivo es determinar cómo localizar los extremos absolutos de una función dada. Antes de hacer esto, necesitamos un tipo adicional de extremo. Para lo cual te damos las siguientes definiciones.

1. **$f(c)$ es un *máximo local* de f si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a c.**
2. **$f(c)$ es un *mínimo local* de f si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a c.**
3. **En cualquiera de estos casos, $f(c)$ recibe el nombre de extremo local de f.**
4. **Los máximos y mínimos locales se llaman también máximos y mínimos relativos, respectivamente.**

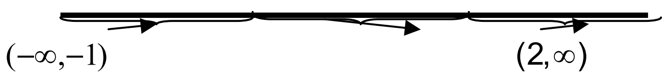
ACTIVIDAD 4.

1. En la gráfica se puede ver una función con varios extremos locales, completa los siguientes enunciados.
   a) $f(a)$ es un ________________________.

b) $f(b)$ es un ________________________.
c) $f(c)$ es un ________________________.
d) $f(d)$ es un ________________________.

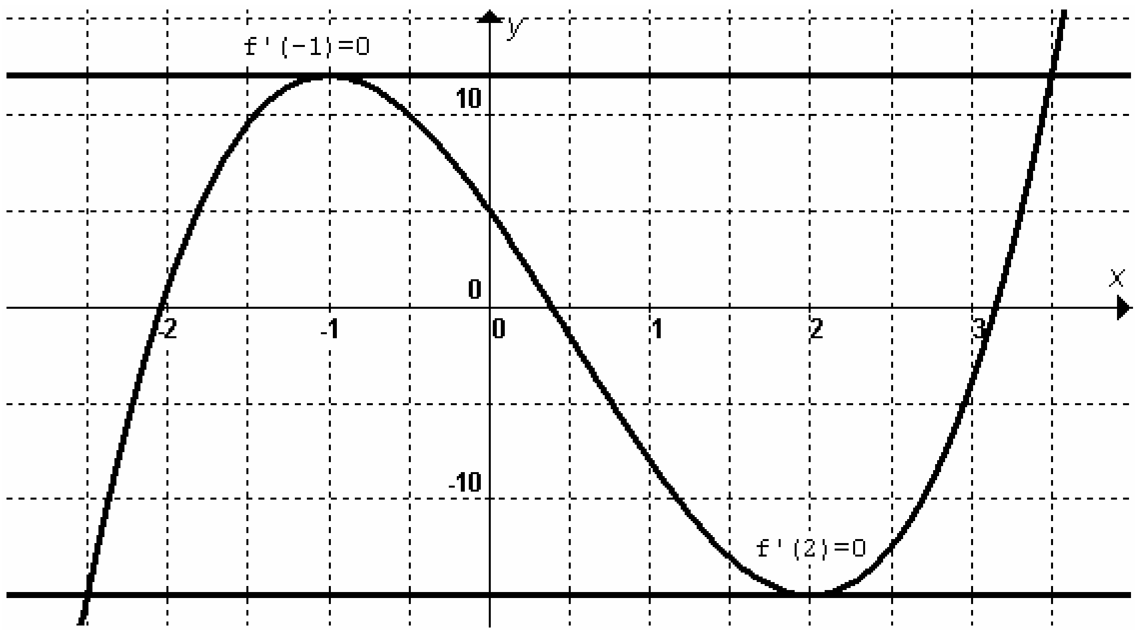


2. Determinemos los extremos locales y describe el comportamiento de la derivada en dichos extremos, de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.
   a) Primero vamos a encontrar los números críticos de la función. Comprueba que la derivada y factorización de la misma queda como:
   $$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x + 1)(x - 2)$$
   Por lo anterior, los números críticos son: x = ________ y x = _______
   b) Ahora dividimos la recta real en tres intervalos cuyos puntos extremos sean los números críticos. Completa la tabla.



Intervalo	$6(x + 1)$	$x - 2$	$f'(x)$	Comportamiento de f
$(-\infty,-1)$			+	Creciente
$(-1, 2)$	+		–	
$(2, \infty)$		+		Creciente

   c) Observa en la gráfica de la función que en los números críticos se encuentran un máximo local y un mínimo local.



El criterio de la primera derivada

Como habrás notado hay una conexión entre los extremos locales y los intervalos en los cuales una función es creciente o decreciente. Esto se establece en el llamado *criterio de la primera derivada.*

Sea *f* una función continua en un intervalo abierto (*a,b*) que contenga al número crítico *c*.

a) Si *f'*(*x*) > *0* para toda *x* en (*a,c*) y *f'*(*x*) < 0 para toda *x* en (*c,b*), entonces *f*(*c*) es un *máximo local* de *f.*

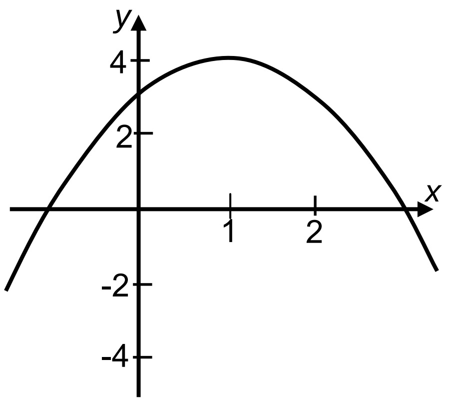
b) Si *f'*(*x*) < *0* para toda *x* en (*a,c*) y *f'*(*x*) > 0 para toda *x* en (*c,b*), entonces *f*(*c*) es un *mínimo local* de *f.*

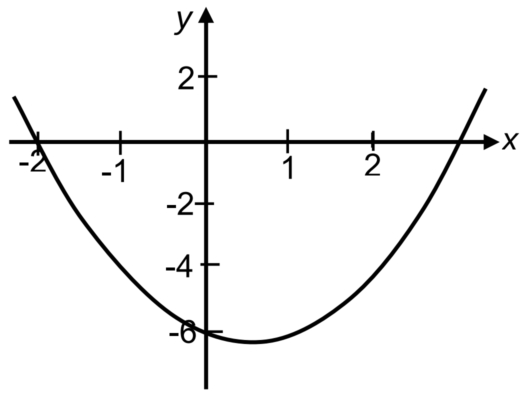
c) Si *f'*(*x*) tiene el mismo signo en ambos lados de *c*, entonces *f*(*c*) *no es un valor extremo de f.*

Es más fácil visualizar gráficamente este criterio para poderlo comprender.

Si *f* es una función creciente a la izquierda de un número crítico *c* y decreciente a la derecha, entonces en el número crítico debe haber un máximo local. Marca en la gráfica de de abajo a la izquierda el número crítico y observa que lo anterior se muestra en ese ejemplo.

Si *f* es una función decreciente a la izquierda de un número crítico y creciente a la derecha, entonces en el número crítico debe haber un mínimo local. Marca en la gráfica de de abajo a la derecha el número crítico y analiza lo dicho.



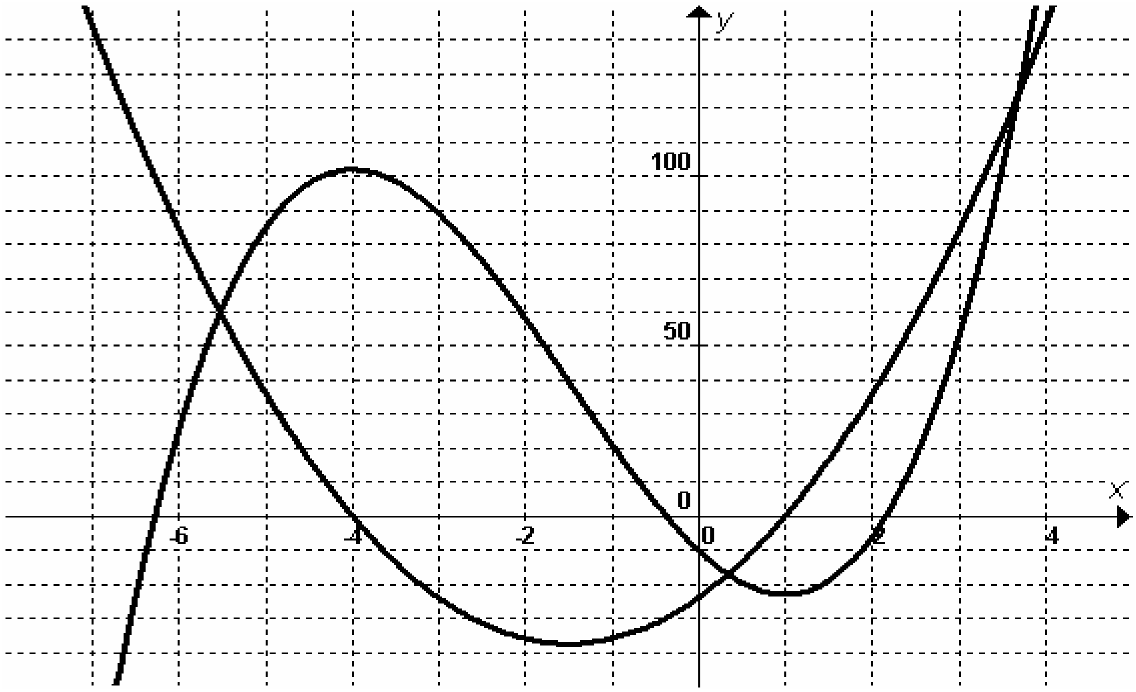


Entonces utilizaremos este criterio apoyándonos en la recta real y los intervalos definidos por los números críticos, como lo hicimos en los ejemplos anteriores.

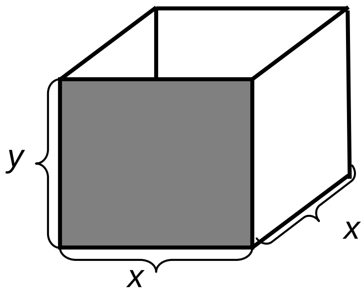
ACTIVIDAD 5.

1. Determina los extremos locales de la función $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$.
   a) Primero deriva la función y encuentra sus números críticos. Comprueba que la derivada se puede factorizar como 6(x – 1)(x + 4), por lo que sus números críticos son: – 4 y 1, los cuales son los candidatos a extremos locales.
   b) Escribe si la derivada es mayor o menor que cero, es decir positiva o negativa, en los intervalos que se indica: $f'(x)$ __ 0 en $(-\infty,-4)$; $f'(x)$ __ 0 en $(1,\infty)$ y $f'(x)$ __ 0 en $(-4,1)$
   c) A partir de la prueba o criterio de la primera derivada, *f* tiene un máximo local ubicado en: $x =$ ____ y un mínimo local ubicado en $x =$ ___.

A continuación te mostramos las gráficas de la función y su derivada. Con base en ellas analiza los resultados que obtuviste. Marca de rojo la que corresponde a la derivada.



2. Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 32000 cm^3. Determina las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado. Completa los pasos que se te piden.
   a) Llamemos x la longitud de la base cuadrada y sea y la longitud de la altura de la caja. El volumen V, en términos de x, y será: V = _______.
   b) Como conocemos que ese volumen debe ser igual a 32000 cm^3, comprueba que $y = \dfrac{32000}{x^2}$
   c) Ahora bien, nos interesa conocer las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado. Dicho de otra forma nos interesa minimizar el área de la caja. Dicha área esta compuesta por cinco rectángulos. Comprueba que su fórmula es: $A = x^2 + 4xy$,



   d) Sustituye en la fórmula del área el valor de y, simplifica y comprueba que se obtiene:

$$A(x) = x^2 + \frac{128000}{x}$$

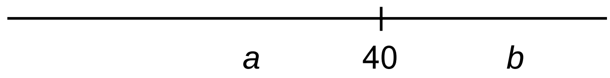
   e) ¿Cuál es el dominio de la función A?

Nuestro objetivo es encontrar las dimensiones para las cuales se minimiza el material utilizado, es decir el área. Es por ello que el trabajo que se ha hecho es el de encontrar una función de una variable que modele el área de la caja, para luego pasar a determinar el valor mínimo de esa función y para qué valores de x ocurres eso.

f) Comprueba que la derivada de $A(x)$ nos queda: $A'(x) = 2x - \dfrac{128000}{x^2}$.

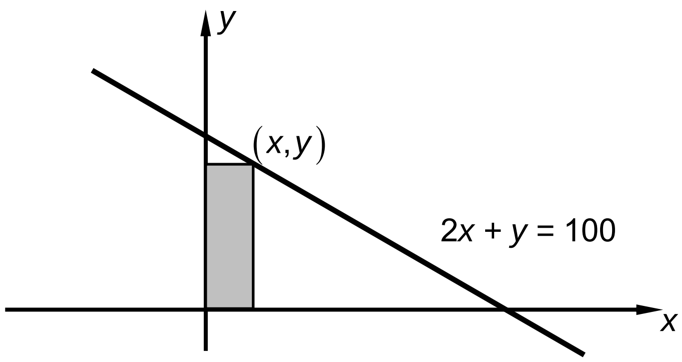
g) Ahora encontremos los números críticos, los cuales deben estar dentro del dominio de la función. Comprueba que sólo tiene un número crítico y que su valor es 40.

h) Toma dos valores cercanos al número 40, como te muestra la figura y contesta lo siguiente: cómo es $f'(x)$ para toda x en (a,c) y cómo es $f'(x)$ para toda x en (c,b). Aplica el criterio de la primera derivada y escribe el resultado obtenido: $A(40)$ ________________________________



i) Por lo tanto, en $x = 40$ hay un ____________________. Las dimensiones de la caja son: largo y ancho iguales a _____ cm y altura de ___ cm.

3. Para cada una de las siguientes funciones:
   a) $f(x) = x^2 – 4x – 1$ b) $f(x) = x^3 – 3x + 2$
   c) $f(x) = x^3 – x^2 – x$ d) $f(x) = x^3 – 6x^2 + 9x – 1$
   Encuentra: (*i*) Los extremos locales de f; (*ii*) los valores de x en los que se encuentran los extremos locales; (*iii*) La gráfica de f.
4. ¿Qué longitud y anchura debe tener un rectángulo de 100 cm de perímetro para que su área sea máxima?
5. Determina dos números positivos cuyo producto sea 192 y cuya suma sea mínima.
6. Un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados tiene un vértice en el origen, uno en el eje x positivo, uno en el eje y positivo y su cuarto vértice en el primer cuadrante, sobre la recta con ecuación $2x + y = 100$, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área máxima posible de dicho rectángulo?



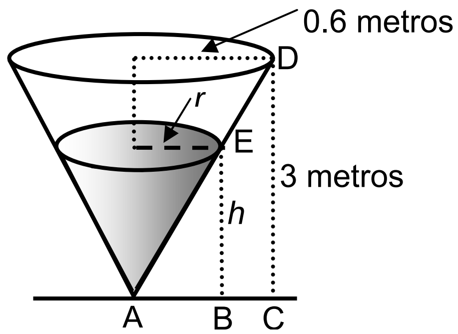
Concavidad.

Anteriormente aprendiste cómo utilizar el signo de la derivada $f'(x)$ para determinar dónde es creciente o decreciente $f(x)$ y dónde tiene su gráfica los extremos relativos. Ahora aprenderás que la segunda derivada $f''(x)$ también proporciona información útil sobre la gráfica de $f(x)$. A manera de introducción, resolveremos el siguiente problema:

ACTIVIDAD 6.

En un tanque de forma cónica está entrando agua a razón de 10 litros por minuto ($0.01\ m^3/min$). El tanque tiene 3 metros de altura y 60 cm de radio en la parte superior. Analicemos lo que ocurre cuando se va llenando.

Nuestra intuición nos dice que al principio el nivel del agua subirá rápidamente, pero conforme el tanque se vaya llenando, la profundidad del agua crecerá más lentamente.



El volumen de un cono de altura h y radio de base r es $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$. Ya que el agua fluye en el tanque a razón de 0.01 m^3 por minuto, después de que el agua ha estado fluyendo en el tanque a está razón durante t minutos, el volumen del agua es: $V(t) = 0.01\, t$ m^3.

Al igualar las dos fórmulas para el volumen del agua, obtenemos una ecuación que relaciona las variables h, r y t:

$$\frac{\pi r^2 h}{3} = 0.01t$$

Observa en la figura que se forman los triángulos semejantes ABE y ACD, de los cuales se puede obtener que $\frac{r}{0.6} = \frac{h}{3}$. De esta ecuación podemos despejar r y llegar a que $r = h/5$, lo cual al sustituirlo en la ecuación del volumen nos queda:

$$\frac{\pi h^3}{75} = 0.01t$$

$$h(t) = \sqrt[3]{\frac{0.75t}{\pi}}$$

La fórmula $h(t)$ expresa la profundidad h del agua en el tanque como una función del tiempo.

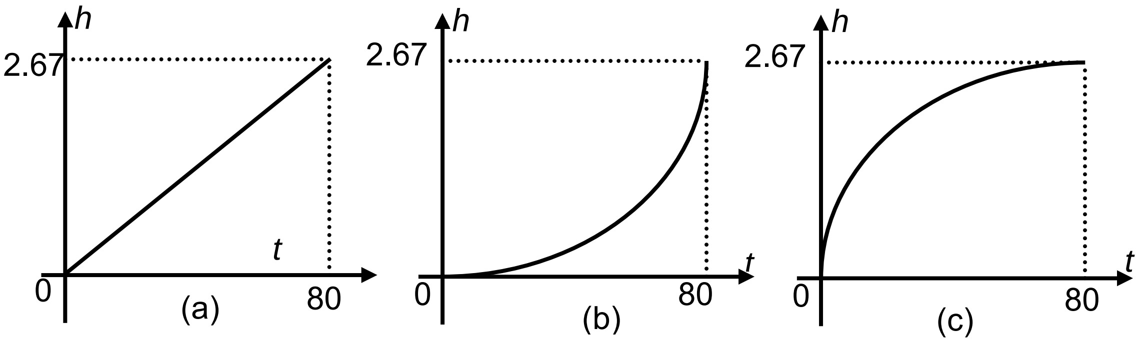
A continuación aparece una tabla que muestra cómo cambia la profundidad del agua durante 80 minutos, considerando intervalos de 10 minutos.

Intervalos	h metros	Cambio de la altura h
0-10	$\sqrt[3]{\frac{7.5}{\pi}}$	$\sqrt[3]{\frac{7.5}{\pi}} - 0 \approx 1.346$
10-20	$\sqrt[3]{\frac{15}{\pi}}$	$\sqrt[3]{\frac{15}{\pi}} - \sqrt[3]{\frac{7.5}{\pi}} \approx 0.347$
20-30	$\sqrt[3]{\frac{22.5}{\pi}}$	$\sqrt[3]{\frac{22.5}{\pi}} - \sqrt[3]{\frac{15}{\pi}} \approx 0.244$
30-40	$\sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}$	$\sqrt[3]{\frac{30}{\pi}} - \sqrt[3]{\frac{22.5}{\pi}} \approx 0.194$

40-50	$\sqrt[3]{\frac{37.5}{\pi}}$	$\sqrt[3]{\frac{37.5}{\pi}} - \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}} \approx 0.164$
50-60	$\sqrt[3]{\frac{45}{\pi}}$	$\sqrt[3]{\frac{45}{\pi}} - \sqrt[3]{\frac{37.5}{\pi}} \approx 0.143$
60-70	$\sqrt[3]{\frac{52.5}{\pi}}$	$\sqrt[3]{\frac{52.5}{\pi}} - \sqrt[3]{\frac{45}{\pi}} \approx 0.128$
70-80	$\sqrt[3]{\frac{60}{\pi}}$	$\sqrt[3]{\frac{60}{\pi}} - \sqrt[3]{\frac{52.5}{\pi}} \approx 0.116$

Esta tabla confirma nuestra intuición. Durante los primeros 10 minutos de flujo, el nivel del agua sube más de un metro, mientras que los últimos 10 minutos el nivel sube sólo 12 cm. Con base en la tabla, es fácil reconocer que efectivamente, el incremento en el nivel del agua no es el mismo para intervalos de tiempo iguales, y más aún, los incrementos van disminuyendo a medida que pasa el tiempo.

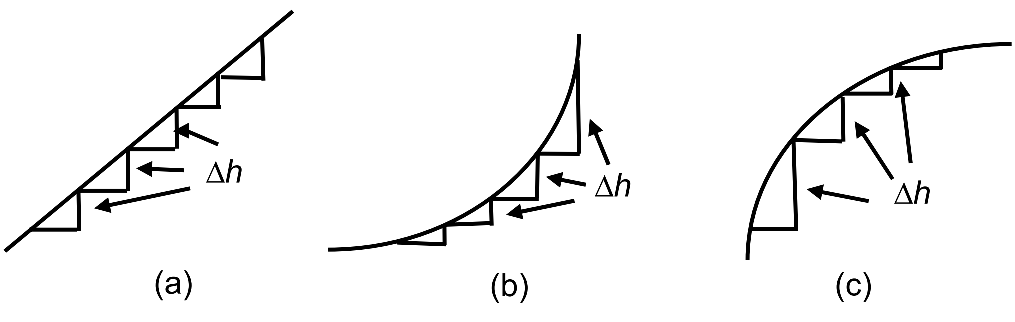
Observa las tres gráficas



Todas ellas reflejan un comportamiento análogo de *h*:

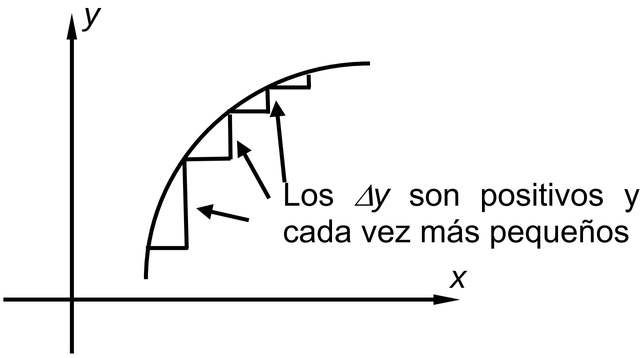
"A medida que avanza el tiempo (movimiento hacia la derecha en el eje horizontal), el valor de *h* va aumentando (movimiento hacia arriba en el eje vertical)"
¿Cuál gráfica representa el nivel del agua del tanque cónico? _____________

Si consideramos subintervalos de tiempo iguales de 10 minutos y sus correspondientes incrementos o cambios de *h* entonces tendremos lo siguiente:

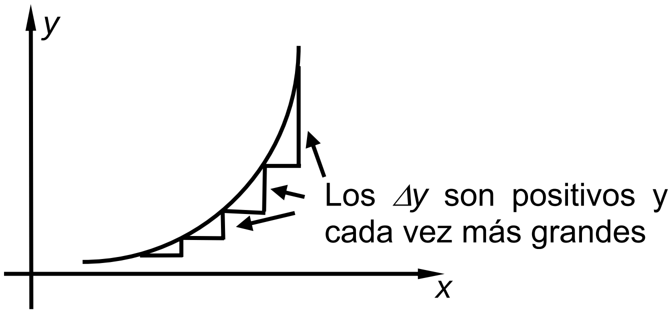


En el primer inciso de la figura los incrementos correspondientes a cada subintervalo de tiempo son iguales (como ya sabíamos). Pero en el inciso (b) y en el (c) podemos observar un comportamiento de los incrementos diferente. En particular, en el inciso (b), los cambios de *h* van aumentando a medida que pasa el tiempo, mientras que en el (c), los cambios de *h* van disminuyendo. Podemos afirmar entonces que el comportamiento de la magnitud *h* que estamos analizando, corresponde al inciso (c), en la cual, a medida que transcurre el tiempo, el nivel crece "cada vez más lentamente".

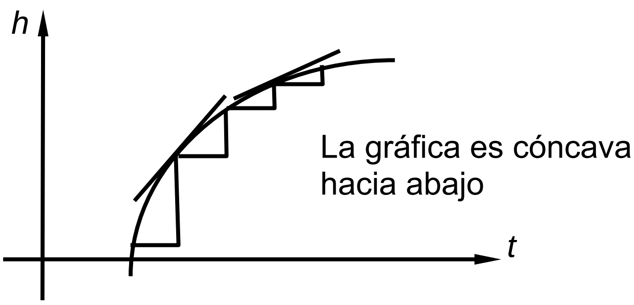
De esta forma, cuando la gráfica de una función tiene este tipo de crecimiento "crecimiento cada vez más lento" se dice que la función es **cóncava hacia abajo**:



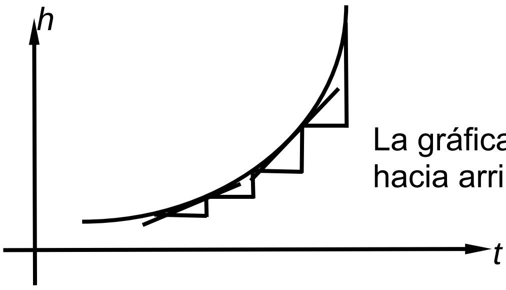
En cambio, cuando el tipo de crecimiento es "crecimiento cada vez más rápido" se dice que la función es **cóncava hacia arriba**.



El comportamiento de la gráfica del inciso (c) puede describirse también en términos de sus rectas tangentes. Observemos que la pendiente de la recta tangente disminuye a medida que *t* aumenta.



De manera análoga, observemos que en la gráfica del inciso (b) la pendiente de la recta tangente aumenta a medida que *t* aumenta.

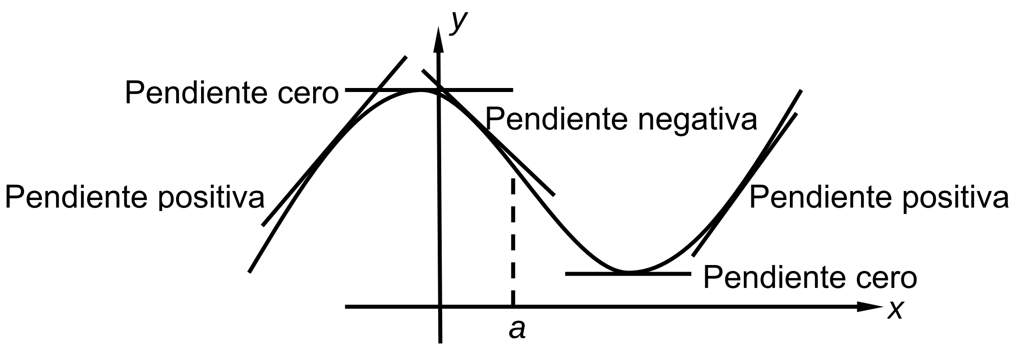


La siguiente definición de concavidad se utiliza para describir el incremento y decremento de la pendiente de la tangente a una curva.

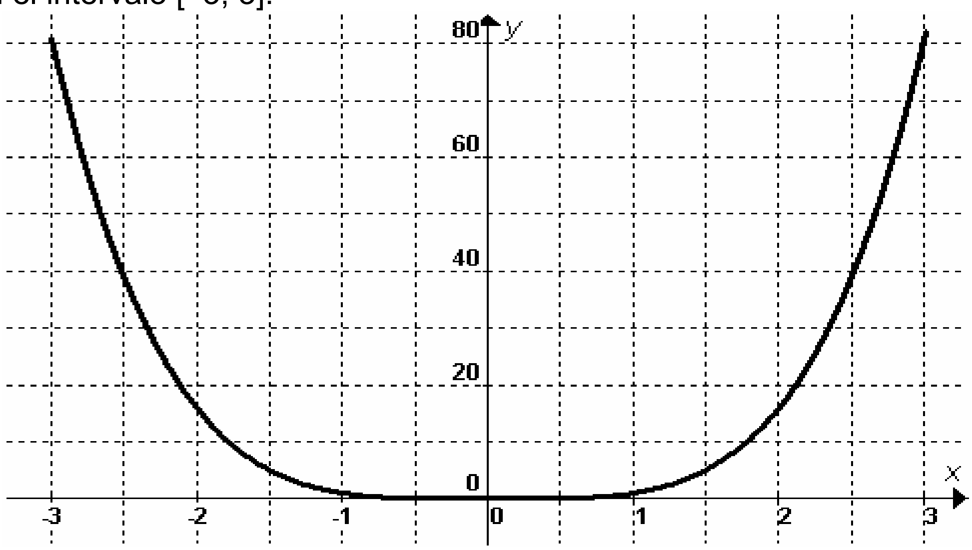
Si la función *f*(*x*) es derivable en un intervalo abierto, entonces la gráfica de *f* es:
a) cóncava hacia arriba si *f’* es creciente en ese intervalo.
b) cóncava hacia abajo si *f* ’ es decreciente en ese intervalo.

ACTIVIDAD 7.

1. En la gráfica ilumina de azul donde la función es cóncava hacia arriba e ilumina de negro dónde sea cóncava hacia abajo.



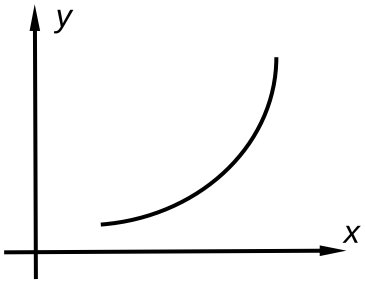
2. Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^4$, $x \varepsilon [-3, 3]$ en $x = -2, -1, 0, 1, 2$ para ratificar que f es cóncava hacia arriba en el intervalo $[-3, 3]$:



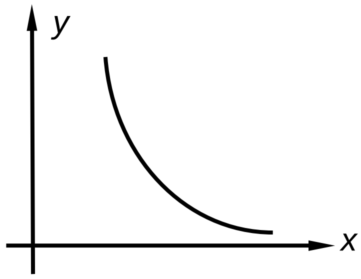
a) En $x = -2$, la pendiente de la recta tangente es ______.
b) En $x = -1$, la pendiente de la recta tangente es ______.
c) En $x = 0$, la pendiente de la recta tangente es ______.

d) En $x = 1$, la pendiente de la recta tangente es ______.
e) En $x = 2$, la pendiente de la recta tangente es ______.

No debe confundirse la concavidad de una curva con su crecimiento o decrecimiento. Una curva cóncava hacia arriba en un intervalo puede ser creciente o decreciente en ese intervalo.



Creciente y cóncava hacia arriba



Decreciente y cóncava hacia arriba

3. Dibuja en tu cuaderno una curva que sea creciente y cóncava hacia abajo y otra que sea decreciente y cóncava hacia arriba.

El signo de la segunda derivada

Existe una caracterización sencilla de concavidad en términos de la segunda derivada (la derivada de la primera derivada), basada en el hecho de que una cantidad aumenta cuando su derivada es positiva y disminuye cuando su derivada es negativa. La segunda derivada tiene importancia cuando este hecho se utiliza a la primera derivada. A continuación se da el argumento.

Suponiendo que la segunda derivada f'' es positiva en un intervalo I, esto implica que la primera derivada f' debe ser creciente en I, luego la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I. De manera análoga, si f'' es negativa en un intervalo I, entonces f' es decreciente allí y la gráfica de f es cóncava hacia abajo. Resumiendo tenemos:

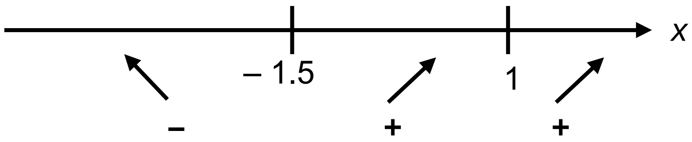
Teorema: Prueba de la concavidad
Si $f'' > 0$ en el intervalo $a < x < b$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en este intervalo.
Si $f''< 0$ en el intervalo $a < x < b$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en este intervalo.

Actividad 8.

1. Revisa y completa los pasos que realizamos para determinar de la función
$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 18x + 15$$
   a) En dónde es creciente y decreciente.
   b) En dónde es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.
   c) Los extremos relativos y trazarla gráfica.

   Comprueba que derivando y factorizando se tiene:
$$f'(x) = 6(2x^3 - x^2 - 4x + 3) = 6(2x + 3)\ (x - 1)^2$$
   Por lo tanto sus números críticos son: $x =$ _____ y $x =$ ____
   Así pues, esos números críticos son los únicos candidatos a extremos locales.

En seguida se muestra el comportamiento del signo de la derivada.



Observa que hay un mínimo relativo en x = _______, pero no hay ningún extremo en x = ______.
Comprueba que la segunda derivada es:

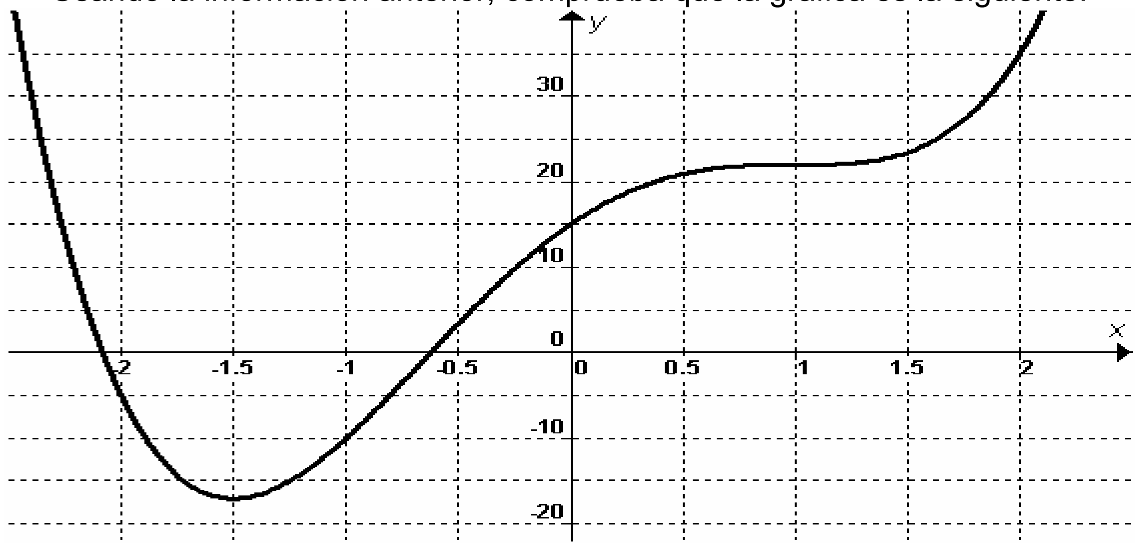
$$f''(x) = 36x^2 - 12x - 24 = 12(x - 1)(3x + 2)$$

Por lo anterior, $f''(x) = 0$ sólo si x = ___ o x = _____. Esto sugiere que examinemos el signo de $f''(x)$ en los intervalos $(-\infty,-\frac{2}{3})$, $(-\frac{2}{3},1)$ y $(1,\infty)$.

Completa la siguiente tabla:

Intervalo	f''	Concavidad
$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$		hacia arriba
$\left(-\frac{2}{3},1\right)$	–	
$(1,\infty)$		

Usando la información anterior, comprueba que la gráfica es la siguiente:



Observa que en el punto $(-\frac{2}{3}, f(-\frac{2}{3}))$ la gráfica pasa de ser cóncava hacia arriba a ser cóncava hacia abajo, y en el punto $(1, f(1))$ sucede lo contrario. Puntos como éstos se llaman ***puntos de inflexión***, que a continuación definimos.

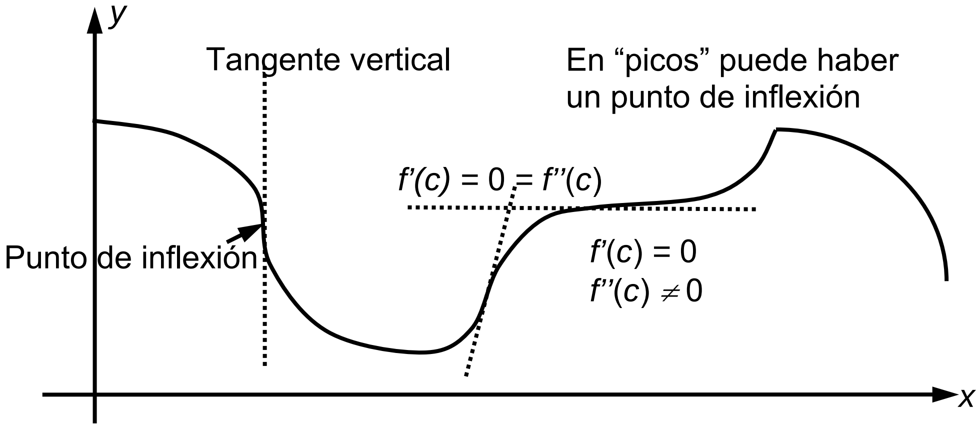
Supongamos que *f* es continua en el intervalo (*a, b*) y que la gráfica cambia de concavidad en un punto *c* ε (*a, b*). Entonces, el punto (*c, f*(*c*)) se llama punto de inflexión de *f*.

2. Dada la función $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$. Determina
   a) La derivada de f.
   b) Los números críticos.

c) Los intervalos donde la función es creciente.
d) El intervalo donde la función es decreciente.
e) El valor de x donde la función tiene un máximo relativo.
f) El valor de x donde la función tiene un mínimo relativo.
g) El punto de inflexión.
h) El intervalo donde la función es cóncava hacia arriba.
i) El intervalo donde la función es cóncava hacia abajo.
j) La gráfica de *f.*

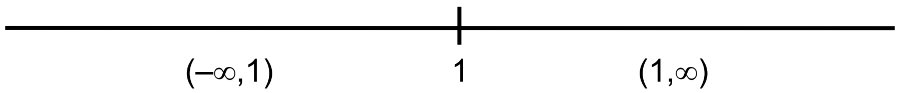
En un punto de inflexión puede ocurrir uno de los dos casos:
a) $f''(c) = 0$ b) $f''(c)$ no exista

Los casos típicos de puntos de inflexión se muestran en la gráfica de abajo.



Para hallar todos los puntos en los que $f''(x)$ es cero o no está definida se obtienen todos los posibles candidatos a puntos de inflexión. Pero debe tenerse cuidado: no todos los puntos en los que $f''(x)$ es cero o no está definida corresponden a puntos de inflexión.

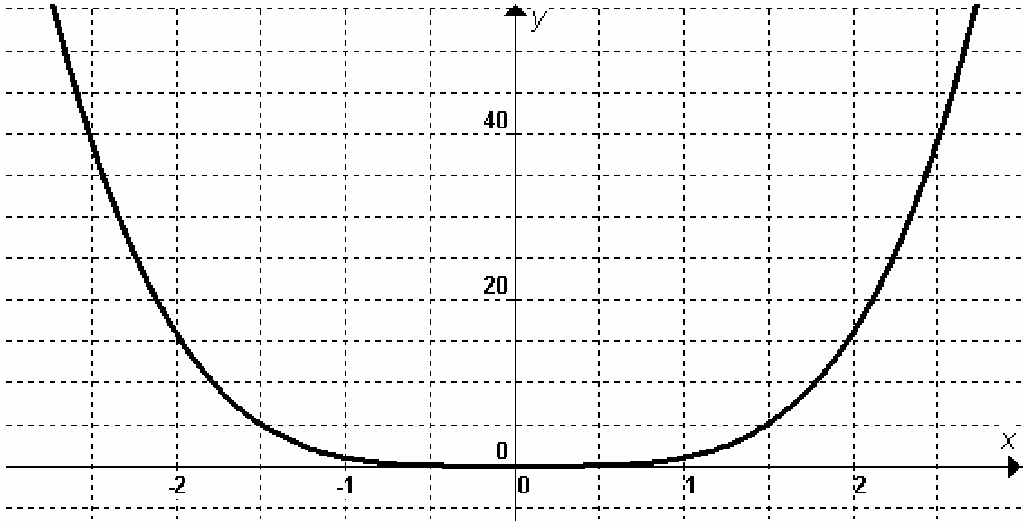
3. Determina las coordenadas de los puntos de inflexión de la siguiente función
$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x.$$
Comprueba que la segunda derivada es: La primera derivada de f es
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 45$$
Comprueba que la segunda derivada es:
$$f''(x) = 6x - 6$$
Por lo anterior $x = 1$, divide al dominio en dos intervalos, a saber, $(-\infty,1)$ y $(1,\infty)$.



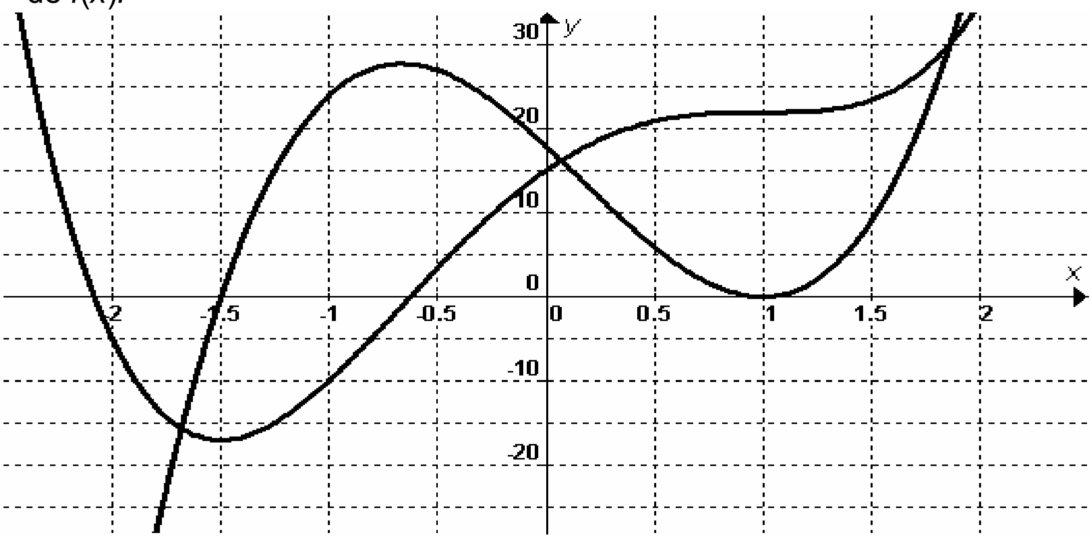
Para conocer el signo de f'' en $(-\infty,1)$, basta tomar un número en dicho intervalo, en este caso tomemos el cero, así $f''(0) = -6 < 0$, por lo tanto f es cóncava hacia abajo. En forma similar, para saber el signo de f'' en el intervalo $(1,\infty)$, tomemos $x = 2$, $f''(2) = 12 - 6 = 6 > 0$, por lo que f es cóncava hacia arriba. De esta manera en $x = 1$ hay un punto de inflexión, y el punto de inflexión es $(1,-47)$.

Como se ve el siguiente ejemplo, el hecho de tener $f''(x) = 0$ no implica la existencia de un punto de inflexión.

4. Determina la concavidad de $f(x) = x^4$ y localiza puntos de inflexión (si existen).
   Tenemos que $f'(x) = 4x^3$ y $f''(x) = 12x^2$. Como $f'(x) > 0$ para $x > 0$, sabemos que f es creciente para $x > 0$ y decreciente para $x < 0$. Además, $f''(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, mientras que $f''(x) = 0$. De modo que la gráfica es _______________ para $x \neq 0$. Además, aunque $f''(x) = 0$, _______ punto de inflexión en $x = 0$.

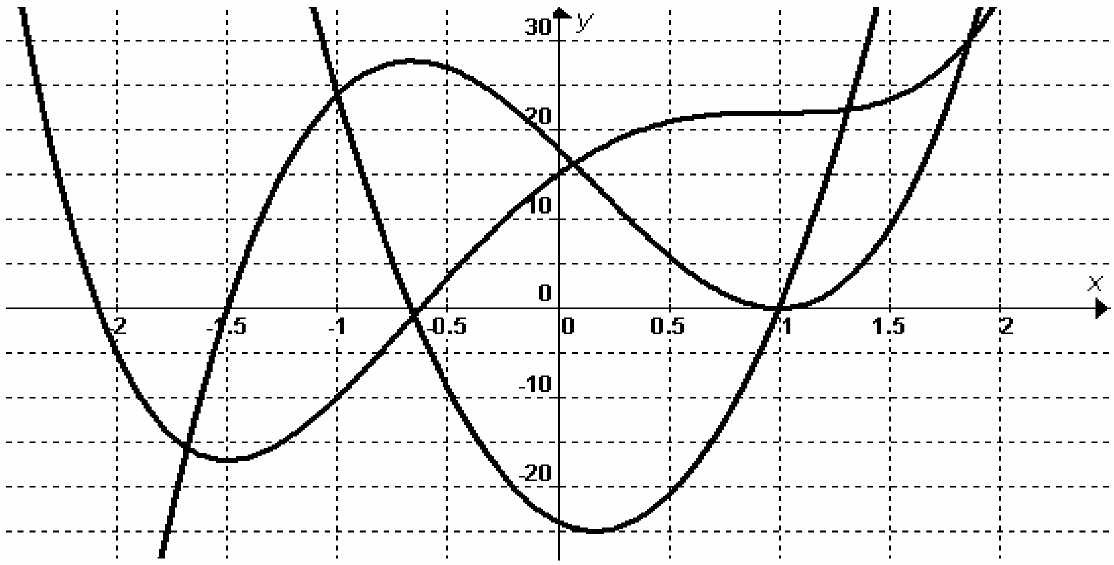


5. Confirma gráficamente los resultados del problema 1 trazando la gráfica de $f(x)$ y la de $f'(x)$. Observa la ubicación de los extremos relativos. Luego traza la gráfica de $f(x)$ y $f''(x)$. Observa en este caso cómo cambia la concavidad de $f(x)$.



Observa la relación entre las dos gráficas. En los intervalos (–1.5,1) y (1,∞) la función f es creciente por lo que $f'(x) > 0$ (la gráfica de la función f' tiene imágenes positivas, es decir arriba del eje x), en el intervalo (–∞,–1.5) la función f es decreciente así $f'(x) < 0$ (la gráfica de la función f' se encuentra abajo del eje x). Cuando la derivada es cero, la gráfica de f' intersecta al eje x, pues su imagen es cero.

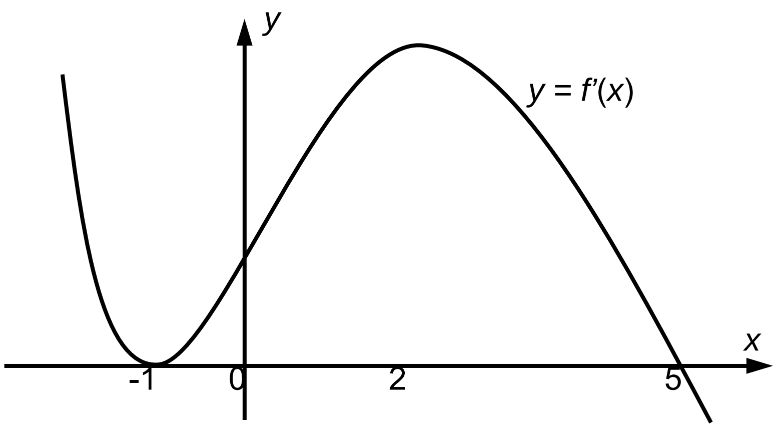
En la gráfica que se muestra a continuación, hemos representado tanto a la gráfica de $f(x)$ como a la de $f'(x)$ y $f''(x)$.



En los intervalos $(-\infty,-\frac{2}{3})$ y $(1,\infty)$ la función f es cóncava hacia arriba por lo que $f''(x) > 0$ (la gráfica de la función f'' tiene imágenes positivas), en el intervalo $(-\frac{2}{3},1)$ la función f es cóncava hacia abajo así $f''(x) < 0$ (la gráfica de la función f' se encuentra abajo del eje x). Cuando la segunda derivada es cero, la gráfica de f'' intersecta al eje x, pues su imagen es cero.

Algunas veces se da una gráfica de una función derivada $f'(x)$ y se pide analizar la gráfica misma de $f(x)$. Por ejemplo, nos pueden dar la gráfica de la velocidad de un móvil en un intervalo de tiempo y solicitarnos la gráfica de la función de desplazamiento en ese intervalo de tiempo. El siguiente ejemplo ilustra un procedimiento para realizar este tipo de análisis.

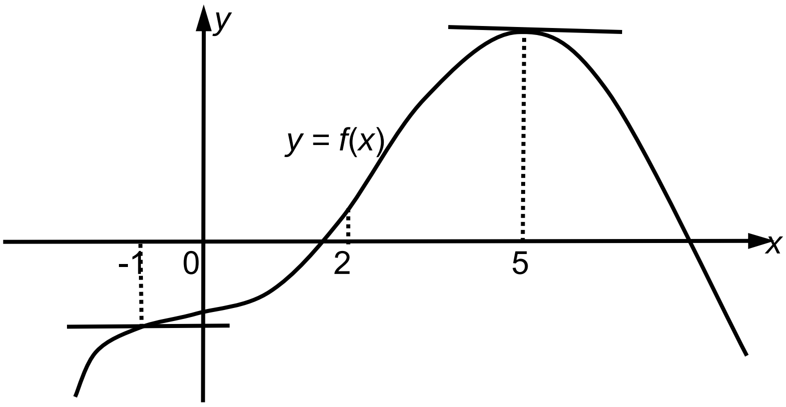
6. En la siguiente gráfica presenta la derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, la concavidad para $f(x)$, y localiza los extremos relativos y los puntos de inflexión. Luego, traza una curva que tenga todas estas características.



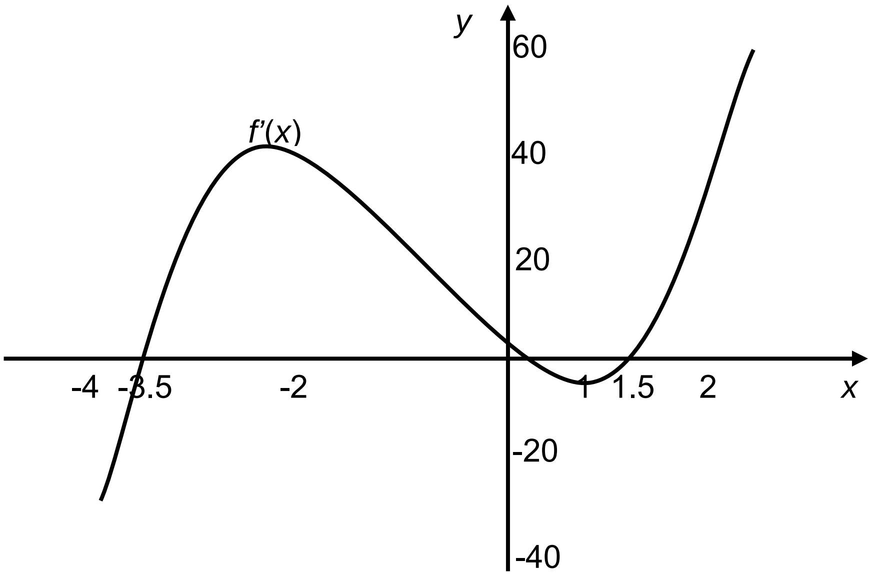
Primero, observa que para $x < -1$, la gráfica de $f'(x)$ está por encima del eje x, luego $f'(x) > 0$ y la gráfica de $f(x)$ es creciente. La gráfica de $f'(x)$ también es decreciente para $x < -1$, lo cual significa que $f''(x) < 0$ y la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo. De manera análoga, se pueden analizar los intervalos $(-1,2)$, $(2,5)$ y $(5,\infty)$; los resultados se resumen en la siguiente tabla.

x	**Característica de *y* = *f'*(*x*)**	**Característica de *y* = *f*(*x*)**
$x < -1$	Positiva, decreciente	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = -1$	Intersección con el eje *x*, tangente horizontal	Tangente horizontal, posible punto de inflexión ($f'' = 0$)
$-1 < x < 2$	Positiva, creciente	Creciente, cóncava hacia arriba
$x = 2$	Tangente horizontal	Posible punto de inflexión
$2 < x < 5$	Positiva, decreciente	Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 5$	Intersección con el eje *x*	Tangente horizontal
$x > 5$	Negativa, decreciente	Decreciente, cóncava hacia abajo

Como la concavidad cambia en $x = -1$ (de abajo hacia arriba), allí se presenta un punto de inflexión junto con una tangente horizontal. En $x = 2$ también existe un punto de inflexión (la concavidad cambia de arriba hacia abajo), pero no hay ninguna tangente horizontal. La gráfica de $f(x)$ es creciente a la izquierda de $x = 5$ y decreciente a la derecha, luego debe haber un máximo relativo en $x = 5$.
En la gráfica de abajo se muestra una posible gráfica que tiene todas las características requeridas para $y = f(x)$. Sin embargo, observa que debido a que no se dan los valores de $f(-1)$, $f(2)$ y $f(5)$, muchas otras gráficas también cumplirán los requisitos.

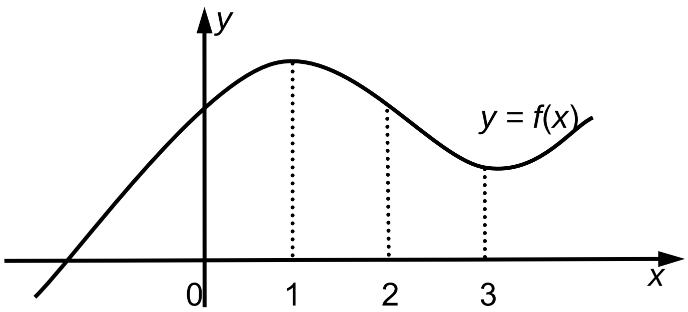


7. Analiza la gráfica de una función derivada $f'(x)$. Describe la función $f(x)$ completa la tabla y traza una posible gráfica de $f(x)$.



x	**Característica de $y = f'(x)$**	**Característica de $y = f(x)$**
$x < -3.5$	Negativa, creciente	
$x = -3.5$		Tangente horizontal
$-3.5 < x < -2$		Creciente, cóncava hacia arriba
$x = -2$	Tangente horizontal	
$-2 < x < 0$		Creciente, cóncava hacia abajo
$x = 0$	Intersección con el eje x	
$0 < x < 1$		
$x = 1$		
$x > 1$		
$1 < x < 1.5$		
$x = 1.5$		
$x > 1.5$		

8. Determina dónde es positiva y dónde es negativa la segunda derivada de la función $f(x)$.



Te sugerimos que, con base en la gráfica de f, dibujes la gráfica de la primera derivada y luego la de la segunda derivada. Teniendo lo anterior, podrás observar que, conforme lo señala la prueba de la concavidad, en los intervalos en donde $f''(x) > 0$, f es cóncava hacia arriba. La $f''(x)$ es positiva en el intervalo _________ Y $f''(x)$ es negativa en el intervalo _________

Ejercicios.

Para cada una de las funciones siguientes:

1. $f(x) = x^3 + 3x^2 +1$ 2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ 3. $f(x) = x^4 + 6x^3 - 24x^2 + 24$
4. $f(x) = x^5 - 5x$ 5. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ 6. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$

Determina:

a) La derivada de f.
b) Los números críticos.
c) Los intervalos donde la función es creciente.
d) El intervalo donde la función es decreciente.
e) El valor de x donde la función tiene un máximo relativo.
f) El valor de x donde la función tiene un mínimo relativo.
g) El punto de inflexión.
h) El intervalo donde la función es cóncava hacia arriba.
i) El intervalo donde la función es cóncava hacia abajo.
j) La gráfica de f.

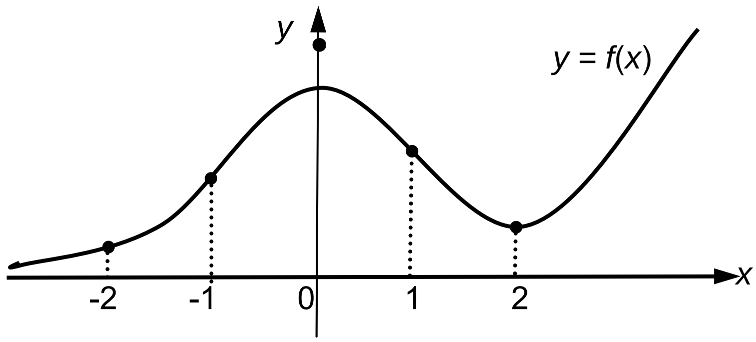
7. $f'(x) = x(x - 4)$ 7. $f'(x) = x(1 - x)$ 8. $f'(x) = x^2 - 2x - 8$

Con base en las derivadas arriba anotadas, encuentra en cada caso:

a) Los intervalos en los cuales f es creciente o decreciente.

b) Los intervalos en los cuales la gráfica de f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.
c) Las coordenadas x de los extremos relativos y los puntos de inflexión de f.
d) Una gráfica posible para $f(x)$.

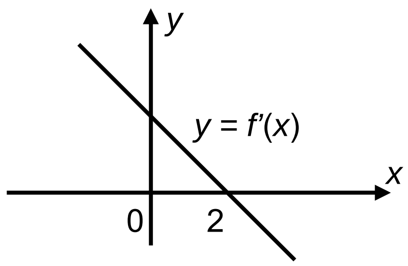
8. Traza la gráfica de una función que cumpla con las características siguientes:
   a) $f'(x) > 0$ cuando $x < -1$ y cuando $x > 3$
   b) $f'(x) < 0$ cuando $-1 < x < 3$
   c) $f'(-1) = 0$
   d) $f'(3) = 0$
9. Determina dónde es positiva y dónde es negativa la segunda derivada de la función $f(x)$.



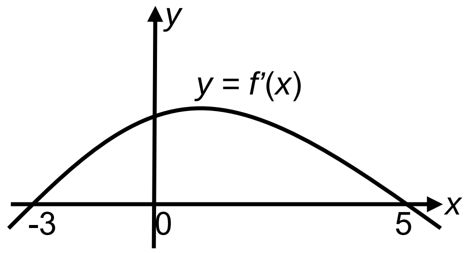
10. Traza la gráfica de una función f que tiene las siguientes propiedades:
   a) $f(0) = 2$, $f(2) = 1$, $f(4) = f(10) = 0$ y $f(6) = -4$.
   b) $f'(2) = f'(6) = 0$.
   c) $f'(x) < 0$ para todo x en los intervalos $(-\infty,4)$, $(4,6)$ y $(10,\infty)$.
   d) $f'(x) > 0$ para todo x en $(6,10)$.
   e) $f'(4)$ y $f'(10)$ no existen.
   f) $f''(x) > 0$ para todo x en $(-\infty,2)$, $(4,10)$ y $(10,\infty)$.
   g) $f''(x) < 0$ para todo x en $(2,4)$

En los problemas 12 a 15, se da la gráfica de una función derivada $y = f'(x)$. Describe la función $y = f(x)$ y traza una posible gráfica de $f(x)$.

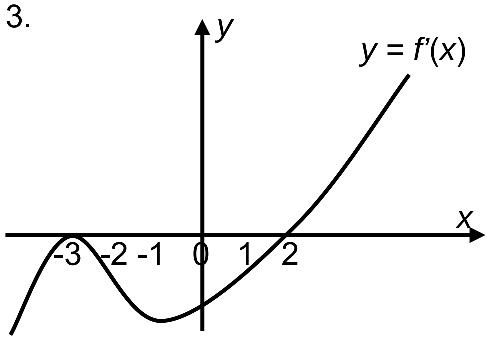
11.



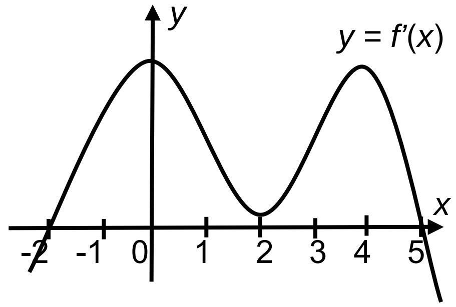
12.



13.

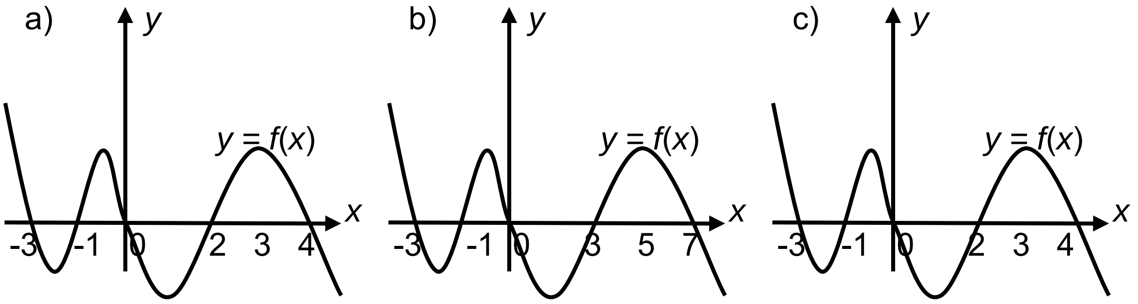


14.



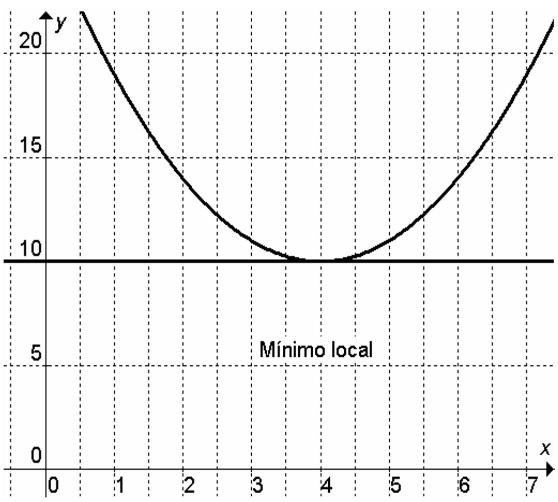
15. Dada la gráfica de una función $f(x)$, ilumina sobre ella la región en la que:

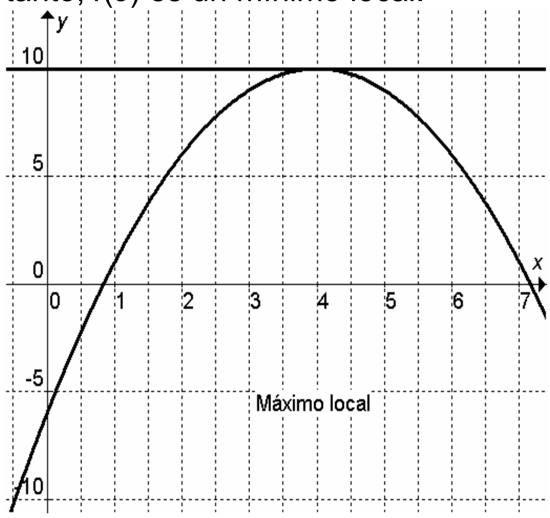
   a) La función es positiva ($f(x) > 0$).
   b) La derivada de la función es positiva ($f'(x) > 0$).
   c) La segunda derivada es positiva ($f''(x) > 0$).



El criterio de la segunda derivada

Como veremos hay una conexión entre la segunda derivada y los extremos. Supongamos que $f'(c) = 0$ y que la gráfica de f es cóncava hacia abajo en algún intervalo abierto que contiene a c. Entonces, en la cercanía de $x = c$, la gráfica es similar a la de abajo a la izquierda y por tanto $f(c)$ es un máximo local. De la misma manera, si $f'(c) = 0$ y la gráfica de f es cóncava hacia arriba en algún intervalo abierto que contiene a c, entonces en la cercanía de $x = c$, la gráfica es similar a la de abajo a la derecha y por tanto, $f(c)$ es un mínimo local.





Resumiendo, se tiene el siguiente criterio.

Teorema: Criterio de la segunda derivada

Sea f una función tal que $f'(c) = 0$ y que la segunda derivada de f existe en un intervalo abierto que contiene a c.

a) Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un valor mínimo relativo.

b) Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un valor máximo relativo.

Aplicaremos el criterio de la segunda derivada para determinar los máximos y mínimos locales de

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

Para encontrar los valores críticos, derivamos e igualamos a cero

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2).$$

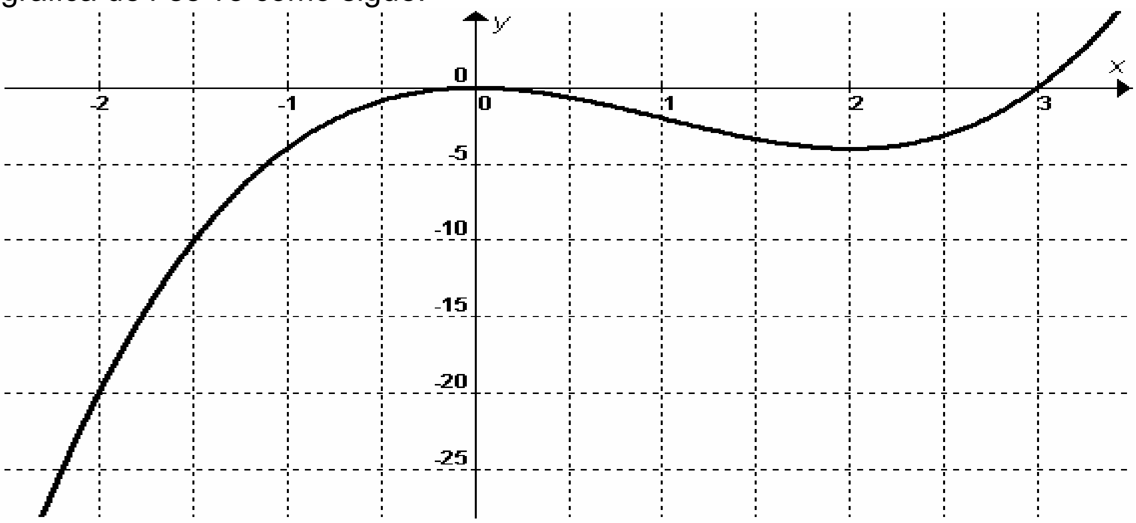
Luego, $x = 0$, $x = 2$ son los números críticos. Para determinar si son máximos o mínimos, calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = 6x - 6.$$

Después, evaluamos los valores críticos

$$f''(0) = -6 < 0 \text{ y } f''(2) = 6(2) - 6 = 6 > 0$$

por lo cual se tiene un máximo local en $x = 0$ y un mínimo local en $x = 2$. La gráfica de f se ve como sigue:



ACTIVIDAD 9.

1. Determina los extremos locales de $f(x) = -3x^5 + 5x^3$.
   Para resolver el ejercicio se te sugiere determines:
   a) La derivada de f
   b) Los números críticos
   c) La segunda derivada de f
   d) Los valores extremos de f
   e) El punto de inflexión de f
   f) La gráfica de la función

En cada caso dibuja la gráfica de f e identifica los extremos locales y sus números críticos. Utiliza cuando sea posible, el criterio de la segunda derivada.

2. $f(x) = (x - 5)^2$
3. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$
4. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$
5. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$

Problemas de optimización.

Esta sección contiene varios ejemplos de cómo aplicar los métodos del cálculo a problemas en los que se requiere encontrar un máximo o un mínimo. Debes poner mucha atención en la manera en que hemos resuelto los problemas. Comenzamos dando algunas guías generales. (Observa que hemos dicho *guías* y no *reglas*). No las memorices pero tenlas en cuenta mientras trabajas en esta sección.

Guías generales para resolver problemas de máximos y mínimos.

1. **Comprende el problema**. El primer paso es leer el problema con cuidado, hasta que se entienda con claridad. Y pregúntate: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son las cantidades dadas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?
2. **Dibuja un diagrama**. En la mayor parte de los problemas, resulta útil dibujar un diagrama e identificar en él las cantidades *y* requeridas.
3. **Introduce notación**. Asigna un símbolo a la cantidad que se va a maximizar o minimizar. Asimismo, selecciona símbolos (*a,b,c*,…) para las otras cantidades desconocidas y marca el diagrama con estos símbolos. Puede ayudar el uso de iniciales como símbolos sugerentes: por ejemplo, *A* para el área, *V* para el volumen, *t* para el tiempo, etc.
4. Expresa la función en términos de algunos de los símbolos del paso 3.
5. Si en esta última se ha expresado como una función de más de una variable, utiliza la información dada para hallar relaciones (en la forma de ecuaciones) entre estas variables. Enseguida, usa estas ecuaciones para eliminar todas las variables, excepto una, en la expresión para la función. Escribe el dominio de esta función.
6. Calcula el máximo o mínimo buscado mediante las técnicas del cálculo.

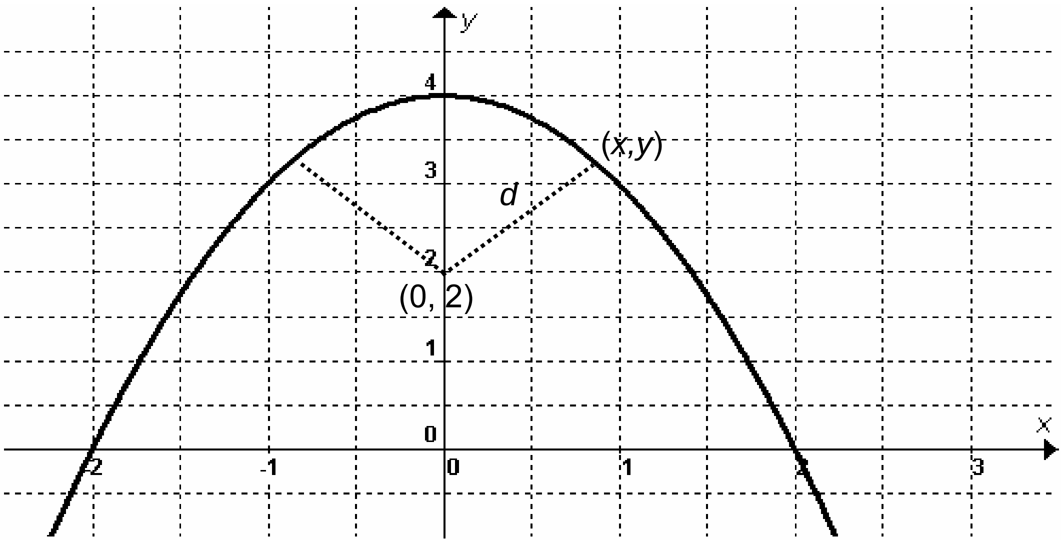
A continuación te mostramos ejemplos en donde se muestra la manera en que se aplica lo que hemos visto.

ACTIVIDAD 10.

Revisa la forma en que se resuelven los problemas y completa lo que se te pide:

1. Determina los puntos de la gráfica de $y = 4 - x^2$ que están más próximos del punto (0,2).

   La gráfica nos indica que hay dos puntos a distancia mínima del (0,2).



La fórmula de la distancia nos da una ecuación para *d*.

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}$$

Comprueba que utilizando la ecuación $y = 4 - x^2$, podemos rescribir la anterior como

$$d = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

Usaremos el hecho de que *d* será mínima cuando lo sea la expresión que está dentro del radical, tan sólo necesitamos hallar los números críticos de

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$$

Comprueba que derivando, igualando a cero y resolviendo la ecuación resultante obtendremos los siguientes números críticos:

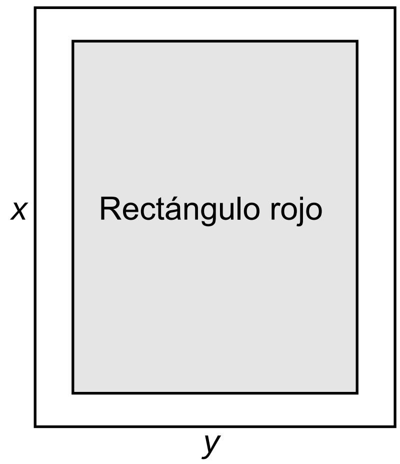
$$x = 0,\ \sqrt{\frac{3}{2}}\ \text{y}\ -\sqrt{\frac{3}{2}}\ \text{son números críticos.}$$

El criterio de la segunda derivada nos muestra que para $x = 0$ se tiene un máximo relativo, mientras que para $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ y $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ se obtienen mínimos de la función. Por lo anterior, los puntos más cercanos son:

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)\ \text{y}\ \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right).$$

2. Un artista decide pintar un cuadro que consiste en un rectángulo rojo bordeado de un borde blanco. Si el rectángulo rojo ha de tener una superficie de 36 cm^2 y el borde ha de tener 3 cm. de ancho a lo largo de cada lado y 5 cm. de ancho a lo largo de los lados superior e inferior. ¿Qué dimensiones ha de tener el cuadro para que tenga la menor área total?

Llamemos *y* a la longitud del ancho del rectángulo y *x* a su largo. Queremos que la expresión *xy* (el área $A(x)$ del rectángulo) sea la más pequeña de todas las posibles con las condiciones dadas. Ahora, en la expresión tenemos 2 variables, necesitamos encontrar una relación entre ellas que nos permita expresar *xy* en una de las variables, observemos que el rectángulo rojo tiene longitudes $(x - 6)$ *y* $(y - 10)$, como dicho rectángulo tiene 36 cm^2 de área obtenemos



$$A = (x-6)(y-10) = 36 \ \therefore\ y = \frac{36}{x-6} + 10$$

Ahora, procedemos a optimizar la expresión $A(x)$.

$$A'(x) = \frac{216}{(x-6)^2} + 10 = 0 \Rightarrow x = 6 + \sqrt{\frac{108}{5}} = 6 + 6\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Como $A''(x) = \frac{432}{(x-6)^3}$, tenemos que $A''(x_1) > 0$.

Por lo tanto, concluimos que hay un mínimo en x_1. Procedamos a encontrar el valor de *y*

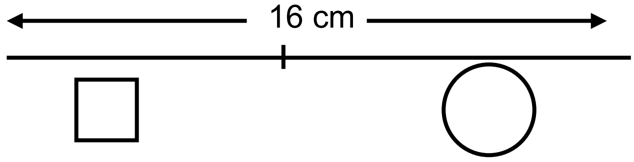
$$y = \frac{36}{x-6} + 10 = \frac{36}{6 + 6\sqrt{\frac{3}{5}} - 6} + 10 = 6\sqrt{\frac{5}{3}} + 10$$

Las dimensiones del cuadro para que tenga la menor área total deben ser:

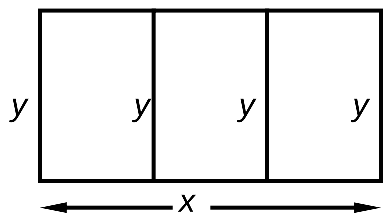
$$\text{ancho} = (x - 6) = 6\sqrt{\frac{3}{5}}\ \text{cm y largo} = (y - 10) = 6\sqrt{\frac{5}{3}}\ \text{cm}$$

Ejercicios.

1. Un alambre de longitud de 16 cm ha de cortarse en dos pedazos, doblándose uno de ellos para formar un cuadrado y el otro para formar una circunferencia. ¿Cómo debería cortarse el alambre para que la suma de las áreas internas por los dos trozos sea mínima?
   a) Si x denota la longitud del lado del cuadrado y r el radio de la circunferencia, dibuja el cuadrado y la circunferencia con las variables dadas.
   b) En el siguiente dibujo, si el primer pedazo se utiliza para construir el cuadrado y el otro para la circunferencia, escribe en términos de x y de r los segmentos.



   c) Si A representa la suma de las áreas del cuadrado y de la circunferencia, escribe la función A en términos de x y de r.
   d) Expresa la longitud del alambre en función del perímetro del cuadrado y de la longitud de la circunferencia.
   e) De la ecuación de la longitud del alambre despeja r.
   f) Sustituye el valor de r en la función A y simplifícala para tener una función de la variable x solamente.
   g) Utiliza el criterio de la segunda derivada para obtener los valores de x y de r que minimizan el área total.
2. Expresa el número 8 como suma de dos números no negativos de manera que la suma del cuadrado del primero y el cubo del segundo sea lo más pequeña posible.
3. ¿Qué longitud y anchura debe tener un rectángulo de 100 cm. de perímetro para que su área sea máxima?
4. Un granjero tiene 600 metros de cerca, con lo que quiere construir un corral rectangular. Parte de la cerca se usará para construir dos cercas internas de división, paralelas a los mismos dos lados del corral. ¿Cuál es el área total máxima posible de dicho corral?



5. Determina las coordenadas del punto más cercano al (4,0) sobre la curva $y = \sqrt{x}$.

6. Encuentra el área del rectángulo más grande que se puede formar si su base se encuentra sobre el eje x y dos vértices en la parábola $y = 27 - x^2$.
7. Se inscribe un cilindro circular recto en una esfera de radio r. Determina el volumen más grande posible de ese cilindro.
8. Un trozo de alambre de 10 m de largo se corta en dos partes. Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. Cómo debe cortarse el alambre de modo que el área total sea:
   a) máxima. b) mínima.

BIBLIOGRAFÍA.

STEWART, James. **CÁLCULO Diferencial e Integral**. International Thomson Editores. 1999.

STEWART, James. **Cálculo. Conceptos y contextos**. International Thomson Editores. 1999.

CRUSE, Allan y LEHMAN, Millianne. **Lecciones de Cálculo – 1, Introducción a la derivada.** Fondo Educativo Interamericano. 1982.

ZILL, Dennos. **CÁLCULO con Geometría Analítica**. Grupo Editorial Iberoamericana 1987.

LÓPEZ DE MEDRANO, Santiago. **Notas de Cálculo***.* Miscelánea Matemática. No. 12 Sociedad Matemática Mexicana. México, D. F. 1985.

COURANT, Richard y HERBERT Robbins. **¿Qué son las Matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales.** Fondo de Cultura Económica. México, D. F. 2002.

SMITH, Robert T. MINTON, Roland B. **Cálculo**, Tomo 1. Mc Graw Hill. 2000.

LARSON – HOSTETLER. **Cálculo y Geometría Analítica**, Segunda edición. Mc Graw Hill. 1982.

HUGHES, Deborah, et al. **Cálculo aplicado**. Cecsa. 2001.

MOCHON, Simón. **Quiero entender el CÁLCULO.** Grupo Editorial Iberoamérica. 1994.

BUCHANAN, Lestón. **LÍMITES**. Easo. 1985.

CCH, UNAM. **Programas de Estudio de Cálculo Diferencial e Integral I y II**. 2004.