UNIDAD 4
COMPORTAMIENTO GRÁFICO Y PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Propósitos: Analizar las relaciones existentes entre la gráfica de una función y sus derivadas para obtener información sobre el comportamiento de la función, utilizar dicha información para resolver problemas de optimización.

*En la **Unidad** siguiente, pretendemos que:*

- Determines gráfica y algebraicamente los intervalos en donde una función es creciente o decreciente.
- Bosquejes la gráfica de la derivada de una función dada la gráfica de la misma.
- Determines los puntos críticos de una función y los clasifica en máximos o mínimos.
- Grafiques una función analizando la información que proporciona su primera derivada.
- Analices el tipo de concavidad de la función a partir del signo de la segunda derivada.
- Grafiques una función analizando la información que proporcionan su primera y segunda derivada.
- Determines los puntos críticos de una función y los clasifica en máximos, mínimos o inflexiones usando el criterio de la segunda derivada.
- Resuelvas problemas que involucren máximos y mínimos de una función.

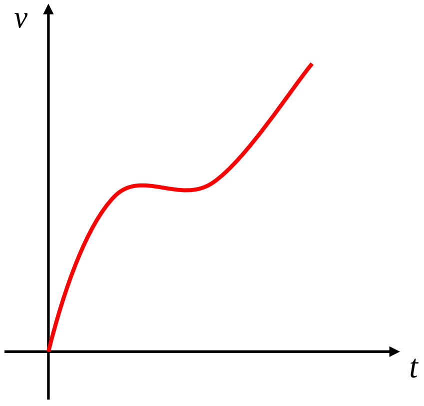
INTRODUCCIÓN:

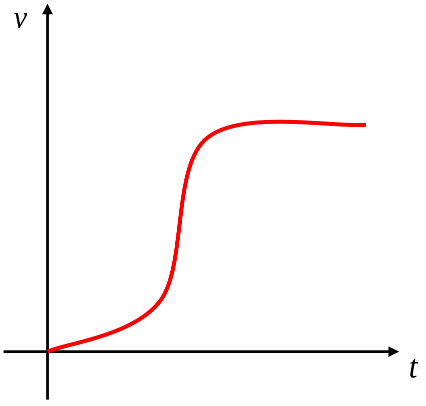
En esta guía en la segunda parte “Comportamiento Gráfico De Una Función” daremos las definiciones o resultados (teoremas) y uno o dos ejemplos de cada uno de ellos. La parte primordial es el trazado de curvas y a eso nos avocaremos con más ejemplos y más trazado de gráficas tanto: dada la función trazar la gráfica, como dada la gráfica de la derivada, trazar la gráfica de la función y viceversa.

En la segunda sección, nos avocaremos a resolver problemas de optimización dando los pasos necesarios para poder resolverlos, usaremos todas las técnicas que hemos estudiado hasta el momento.

➢ SITUACIONES QUE PROPICIAN EL ANÁLISIS DE LAS RELACIONES ENTRE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN Y SU DERIVADA.

En varias ocasiones se lleva registro de la velocidad en que viaja un objeto y a partir de la gráfica de este registro, se pide que se dé una descripción de su trayectoria, por ejemplo, las gráficas siguientes, describen velocidades de dos objetos, en estas se puede preguntar cuál de los dos permaneció más tiempo quieto, o cuál de los dos inicio su viaje más rápido, entre otras preguntas que se pueden hacer.





El estudio de la gráfica de una función (o de la derivada de una función y viceversa) nos permite conocer su comportamiento de su trayectoria, si realizó un alto, si aceleró, si desaceleró o bien si la función no puede ser calculada a través de la derivada de la función, se puede hacer apreciaciones cualitativas sobre su trayectoria, además nos permite extrapolar o interpolar y conocer aproximadamente resultados que no son evidentes.

➢ COMPORTAMIENTO GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN.

✓ *Puntos críticos.*

Sea f una función con dominio $[a,b]$, si f tiene un punto critico $c\ \varepsilon\ (a,b)$ si $f'(c)=0$ o bien $f'(c)$ no existe.

Ejemplo 1. Sea $f(x)=x^3-12x,$ calcula los puntos críticos de f en el intervalo $[-3,4]$

Solución: Calculemos la derivada de la función f e igualémosla a cero.

$$f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)=3(x-2)(x+2)=0$$

por lo tanto $x-2=0$ o $x+2=0$ las soluciones son $x=2$, $x=-2$, los cuales son los puntos críticos.

Ejemplo 2. Encuentra los puntos críticos de la función

$$f(x)=\sqrt{9-x^2}.$$

Solución: Derivamos a la función e igualamos a cero, resolvemos la ecuación resultante.

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2}} = 0$$

En este caso, la única solución es $x = 0$, pero la derivada de la función no existe para $x = 3$ y $x = -3$, por lo que los puntos críticos son: $x = -3, 0, 3$.

✓ *Crecimiento y decrecimiento de funciones.*

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b).

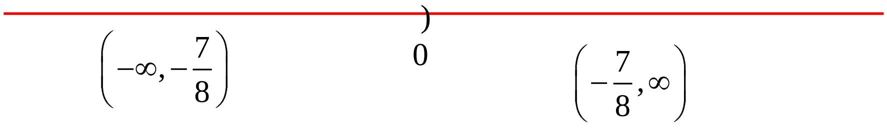
a) Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a,b), entonces f es creciente en $[a,b]$.

b) Si $f'(x) < 0$ para toda x en (a,b), entonces f es decreciente en $[a,b]$.

Ejemplo 3. Sea $f(x) = -4x^2 - 7x + 5$. Encuentra los intervalos en donde f es creciente y decreciente.

Solución: Primero encontramos los puntos críticos, (derivamos e igualamos a cero, resolvemos la ecuación resultante).

$f'(x) = -8x - 7 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{8}$ esta raíz, divide al dominio en dos intervalos, como se muestra en la figura.



a saber, $\left(-\infty, -\frac{7}{8}\right)$ y $\left(-\frac{7}{8}, \infty\right)$, elijamos un valor en el primer intervalo, digamos $x = -2$, entonces $f'(-2) = -8(-2) - 7 = 16 - 7 = 9 > 0$

concluimos que $f'(x) > 0$ en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{7}{8}\right)$, es decir, f es creciente en dicho intervalo. En forma similar, $f'(x) < 0$ en el intervalo $\left(-\frac{7}{8}, \infty\right)$ y por lo tanto f es decreciente en dicho intervalo.

Ejemplo 4. Determina los intervalos en donde la función es creciente y los intervalos en donde es decreciente.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

Solución: La derivada de la función $f(x)=x^3-3x^2+2x+2$ es $f'(x)=3x^2-6x+2$ cuyos puntos críticos son $3x^2-6x+2=0 \Rightarrow x=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, los cuales dividen al dominio de la función en tres partes, nos apoyaremos de la tabla siguiente

Intervalo	*Signo de* f'	*Comportamiento de* f
$(-\infty, 1-\sqrt{3}/3)$	*Positivo*	*Crece*
$(1-\sqrt{3}/3, 1+\sqrt{3}/3)$	*Positivo*	*Crece*
$(1+\sqrt{3}/3, \infty)$	*Positivo*	*Crece*

Por lo tanto la función siempre es creciente.

Ejemplo 5. Determina los intervalos en donde la función es creciente y los intervalos en donde es decreciente.

$$f(x)=x^4-2x^2-1$$

Solución: La derivada de la función $f(x)=x^4-2x^2-1$ es $f'(x)=4x^3-4x$ cuyos puntos críticos son:

$$4x^3-4x=4x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=-1, 0 \;\; y \;\; 1,$$

hay tres puntos críticos que dividen al dominio en cuatro partes, a saber

Intervalo	*Signo de* f'	*Comportamiento de* f
(-∞,-1)	*Negativo*	*Decrece*
(-1,0)	*Positivo*	*Crece*
(0,1)	*Negativo*	*Decrece*
(1,∞)	*Positivo*	*Crece*

Concluimos que la función es creciente en (-1,0) y (1, ∞), decrece en (-∞,-1) y (0,1).

✓ ***Concavidad.***

Sea f una función que admite una segunda derivada f'', supongamos que c esta en el dominio de la función, entonces

a) Si $f''(c)>0$, entonces f es cóncava hacia arriba
b) Si $f''(c)<0$, entonces f es cóncava hacia abajo.

Ejemplo 6. Determina los intervalos en donde la función es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo de la siguiente función.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x \,.$$

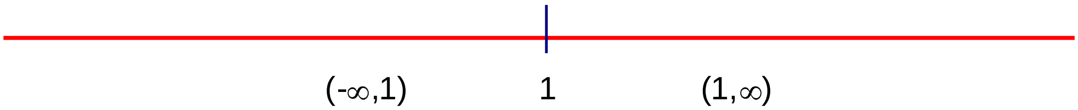
Solución: La primera derivada de f es

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 45$$

la segunda derivada

$$f''(x) = 6x - 6$$

su raíz de la segunda derivada es $x = 1$, este punto divide al dominio en dos intervalos, a saber, $(-\infty, 1)$ y $(1,\infty)$



para saber el signo de f'' en $(-\infty,1)$, basta tomar un número en dicho intervalo, como ya lo hemos hecho notar, en este caso tomemos el número cero, así $f''(0) = -6 < 0$, por lo tanto f es cóncava hacia abajo en ese intervalo, en forma similar, para saber el signo de f'' en el intervalo $(1,\infty)$, tomemos $x = 2$ y $f''(2) = 6 > 0$, por lo que f es cóncava hacia arriba. De esta manera f es cóncava hacia arriba en $(1,\infty)$ y es cóncava hacia abajo en $(-\infty,1)$.

Ejemplo 7. Determina los intervalos en donde la función es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo de la siguiente función.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Solución: Las derivadas de la función son:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

La raíz de la segunda derivada es $x = 2$, este valor divide a su dominio en dos partes, investiguemos el signo de la segunda derivada de la función en esos dos intervalos, la tabla siguiente nos ayudará para ese propósito.

Intervalo	*Signo de* f''	*Comportamiento de* f
$(-\infty, 2)$	*Negativo*	*Cóncava hacia abajo*
$(2, \infty)$	*Positivo*	*Cóncava hacia arriba*

Ejemplo 8. De aplicación (Louis Leithold)

Supongamos que se calcula que t horas después de comenzar a trabajar a las 7 AM. Un obrero que labora en el departamento de ensamblaje ha realizado una tarea determinada en

$$f(t) = -t^3 + 9t^2 + 21t \text{ , para } 0 \le t \le 5$$

Derivando a la función se tiene

$$f'(t) = -3t^2 + 18t + 21$$
$$f''(t) = -6t + 18 = 6(-t + 3)$$

Observemos que $f''(t) > 0$ si $0 < t < 3$ y $f''(t) < 0$ si $3 < t < 5$, entonces $f'(t)$ es creciente en $0 < t < 3$ y decreciente en $3 < t < 5$, como $f'(t)$ es la razón de cambio instantánea de f concluimos que en las primeras tres horas (de 7 a 10) el obrero realiza su labor en una razón creciente y en las dos horas restantes (de 10 a 12) la realiza en una razón decreciente, es decir en $3 < t < 5$ hay una reducción en el nivel de producción del obrero.

- ✓ ***Puntos de inflexión.***

Criterio del punto de inflexión

Sea f una función con doble derivada en un intervalo $[a,b]$, sea c en (a,b), supongamos que $f'(c) = 0$. Entonces, c es un punto de inflexión de f, si $f''(x) < 0$ en un lado de c y $f''(x) > 0$ del otro lado.

Ejemplo 9. Determina las coordenadas de los puntos de inflexión de la función siguiente:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$$

Solución: Las derivadas de f son:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \text{ ,}$$
$$f''(x) = 12x^2 - 4 \text{ ,}$$

Las raíces de la segunda derivada son $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ estos puntos dividen en tres intervalos al dominio de la función, apoyémonos en la tabla siguiente

Intervalo	*Signo de f''*	*Comportamiento de f*
$(-\infty, -1/\sqrt{3})$	*Positivo*	*Cóncava hacia arriba*
$(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$	*Negativo*	*Cóncava hacia abajo*
$(1/\sqrt{3}, \infty)$	*Positivo*	*Cóncava hacia arriba*

Los puntos en donde la segunda derivada es cero, son puntos de inflexión ya que hay un cambio de concavidad. Las coordenadas de los puntos de inflexión son:

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{22}{9}\right) \text{ y } \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{22}{9}\right)$$

Ejemplo 10. Determina las coordenadas de los puntos de inflexión de la función siguiente:

$$f(x)=2x+x^{2/3}$$

Solución: Las derivadas de f son:

$$f'(x)=2+\frac{2}{3}x^{-1/3},$$
$$f''(x)=-x^{-4/3},$$

como f'' no puede ser cero la función no tiene puntos de inflexión

✓ *Máximos y mínimos, criterio de la 1° y 2° derivada*

Criterio de la primera derivada.

Sea f una función continua en un intervalo abierto (a,b) que contenga al número crítico c.

a) Si $f'(x)>0$ para toda x en (a,c) y $f'(x)<0$ para toda x en (c,b), entonces $f(c)$ es un valor máximo local de f.
b) Si $f'(x)<0$ para toda x en (a,c) y $f'(x)>0$ para toda x en (c,b), entonces $f(c)$ es un valor mínimo local de f.
c) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo a ambos lados de c, entonces $f(c)$ no es un valor extremo de f.

Criterio de la segunda derivada.

Sea f una función con doble derivada en un intervalo $[a,b]$, sea c en (a,b), supongamos que $f'(c)=0$.
a) Si $f''(c)>0$, entonces f tiene un valor mínimo en $x=c$.
b) Si $f''(c)<0$, entonces f tiene un valor máximo en $x=c$.

Ejemplo 11. Encuentra los máximos y mínimos de la función f dada en $(0,\infty)$.

$$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$$

Solución: Primero encontremos los valores críticos, haciendo cero la derivada de la función

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = 0$$
$$2x^4 = 2 \Rightarrow x = -1,1$$

no consideraremos a $x = -1$ ya que no es un elemento del dominio de la función, enseguida hagamos un análisis del comportamiento de f en cada uno de los intervalos, en que fue dividido el dominio.

Intervalo	*Signo de f'*	*Comportamiento de f*
(0,1)	*Negativo*	*Decrece*
(1,∞)	*Positivo*	*Crece*

Por el criterio de la primera derivada, en $x = 1$, la función alcanza su valor mínimo absoluto, $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$.

Ejemplo 12. Encuentra los puntos críticos y determina si son mínimos o máximos de la siguiente función $f(x+3) = x^2$.

Solución: Primero hagamos un cambio de variables, sea $u = x+3 \therefore x = u-3$ y la función dada se transforma en $f(u) = (u-3)^2$, derivemos con respecto a u,

$$f'(u) = 2(u-3)$$

igualando a cero la derivada de la función encontramos que $u = 3$, es el único punto crítico, analicemos la naturaleza de este punto con la ayuda de la siguiente tabla

Intervalo	*Signo de f'*	*Comportamiento de f*
(-∞,3)	*Negativo*	*Decrece*
(3,∞)	*Positivo*	*Crece*

Por lo tanto hay un mínimo en $u = 3$, este punto corresponde a $x = 0$, así que en $x = 0$, la función tiene un mínimo.

Ejemplo 13. Sea $f(x) = x^5 - 5x^3$. Usa el criterio de la segunda derivada para encontrar los máximos y mínimos locales de f. Encuentra los intervalos donde f es cóncava hacia arriba y hacia abajo, así como los puntos de inflexión,

Solución: Calculemos la primera derivada

$$f'(x)=5x^4-15x^2=5x^2(x^2-3)=0$$

los valores críticos, son $x=-\sqrt{3},0,\sqrt{3}$. El dominio de la función queda dividida en cuatro intervalos, hagamos nuestro cuadro típico

Intervalo	*Signo de f'*	*Comportamiento de f*
(-∞,-$\sqrt{3}$)	*Positivo*	*crece*
(-$\sqrt{3}$,0)	*Negativo*	*decrece*
(0, $\sqrt{3}$)	*Negativo*	*decrece*
($\sqrt{3}$, ∞)	*Positivo*	*crece*

Al calcular la segunda derivada obtenemos

$$f''(x)=20x^3-30x=10x(2x^2-3)=0$$

los posibles puntos de inflexión son $x=-\sqrt{\frac{3}{2}},\ 0,\ \sqrt{\frac{3}{2}}$ el dominio queda dividido en cuatro intervalos y, ahora procedamos a realizar una tabla para la segunda derivada

Intervalo	*signo de f''*	*Comportamiento de f*
(-∞,-$\sqrt{3/2}$)	*Negativo*	*Cóncava hacia abajo*
(-$\sqrt{3/2}$,0)	*Positivo*	*Cóncava hacia arriba*
(0, $\sqrt{3/2}$)	*Negativo*	*Cóncava hacia abajo*
($\sqrt{3/2}$,∞)	*Positivo*	*Cóncava hacia arriba*

En $x=0$ no hay un extremo, pero con la información de la tabla se tiene un punto de inflexión. Calculemos las imágenes de estos puntos, valores máximos, mínimos y puntos de inflexión.

$$f(-\sqrt{3})=(-\sqrt{3})^5-5(-\sqrt{3})^3=-3\sqrt{3}(3-5)=6\sqrt{3}$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5-5\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3=\frac{21}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$f(0)=0$$

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5-5\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3=-\frac{21}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$f(\sqrt{3})=-6\sqrt{3}$$

Ejemplo 14. Sea $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$. Usa el criterio de la segunda derivada para encontrar los máximos y mínimos locales de f. Encuentra los intervalos donde f es cóncava hacia arriba y hacia abajo, así como los puntos de inflexión, traza la gráfica de f.

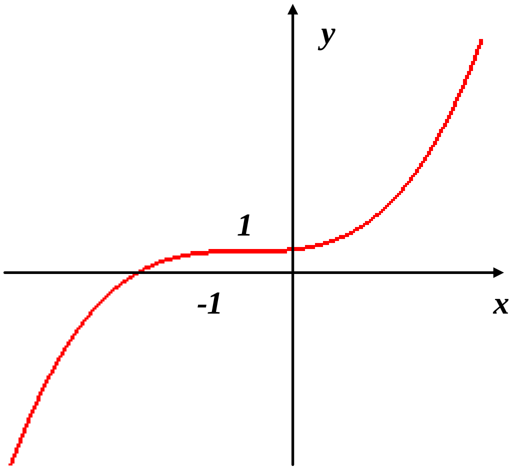
Solución: Las dos primeras derivadas son:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 \qquad \text{y} \qquad f''(x) = 6x + 6$$

la función tiene un punto crítico en $x = -1$ y un posible punto de inflexión también en el mismo punto, la siguiente tabla nos ayudara a determinar su naturaleza

Intervalo	*signo de f'*	*Signo de f''*	*Comportamiento de f*
(-∞,-1)	*Positivo*	*Negativo*	*Crece, cóncava hacia abajo*
(-1,∞)	*Positivo*	*Positivo*	*Crece, cóncava hacia arriba*

La función no tiene ni máximo ni mínimo y sólo un punto de inflexión en $x = -1$, se muestra una forma de la gráfica de la función.



Ejemplo 15. Sea $y = 3x^4 - 6x^2$. Usa el criterio de la segunda derivada para encontrar los máximos y mínimos locales de y. Encuentra los intervalos donde y es cóncava hacia arriba y hacia abajo, así como los puntos de inflexión, traza la gráfica de y.

Solución: La primera derivada es:

$$y' = 12x^3 - 12x = 12x(x^2 - 1),$$

Al encontrar sus raíces, estas nos proporciona tres puntos críticos, a saber, $x = -1, x = 0$ y $x = 1$, la tabla siguiente nos ayudará a conocer la naturaleza de la gráfica de la función con respecto a su crecimiento y decrecimiento.

Intervalo	signo de f'	Comportamiento de f
$(-\infty,-1)$	Negativo	Decrece
$(-1,0)$	Positivo	Crece
$(0,1)$	Negativo	Decrece
$(1,\infty)$	Positivo	Crece

Concluimos que la gráfica de la función tiene dos puntos mínimos en $x=-1$ y en $x=1$ y un máximo en $x=0$. La segunda derivada es:

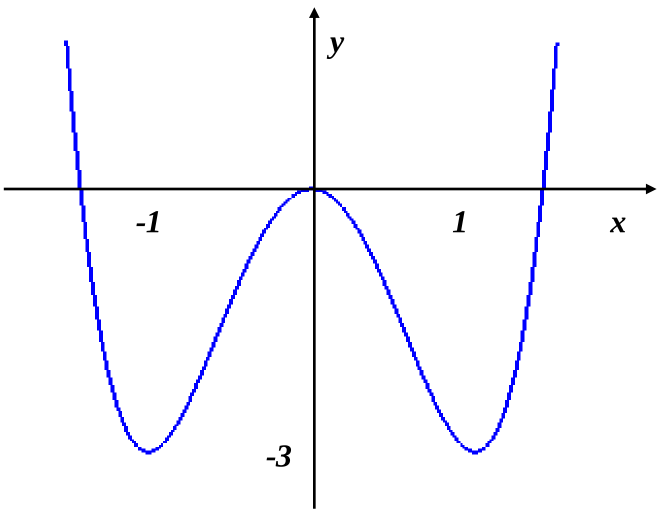
$$y''=36x^2-12,$$

esta segunda derivada es cero cuando $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, la siguiente tabla nos ayudará a saber su comportamiento con respecto a su concavidad.

Intervalo	signo de f'	Comportamiento de f
$\left(-\infty,-1/\sqrt{3}\right)$	Positivo	Cóncava hacia arriba
$\left(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}\right)$	Negativo	Cóncava hacia abajo
$\left(1/\sqrt{3},\infty\right)$	Positivo	Cóncava hacia arriba

La función tiene dos puntos de inflexión en $\left(-1/\sqrt{3},-5/3\right)$ y $\left(1/\sqrt{3},-5/3\right)$

Mostramos la forma de la gráfica de la función-



Ejemplo 16. Sea $y=x^4-4x^3+16x-6$. Usa el criterio de la segunda derivada para encontrar los máximos y mínimos locales de y. Encuentra los intervalos donde y es cóncava hacia arriba y hacia abajo, así como los puntos de inflexión, traza la gráfica de y.

Solución: Las derivadas de la función son:

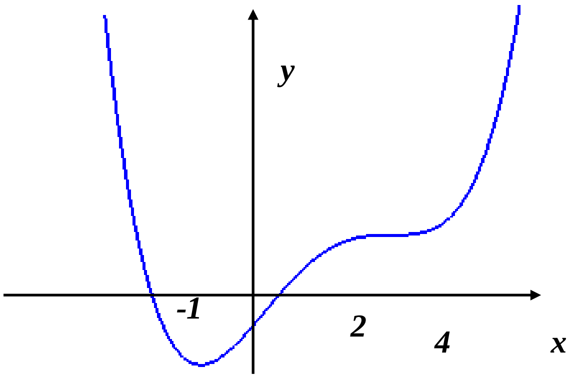
$$y' = 4x^3 - 12x^2 + 16 = 4(x+1)(x^2 - 4x + 4) = 4(x-4)^2(x+1)$$
$$y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$$

los puntos críticos son $x = -1$ y $x = 4$, los puntos de inflexión $x = 0$ y $x = 2$, con ayuda de las tablas siguientes trazaremos la forma de la gráfica de la función

Intervalo	*Signo de f'*	*Comportamiento de f*
(-∞,-1)	*Negativa*	*Decrece*
(-1,4)	*Positiva*	*Crece*
(4,∞)	*Positiva*	*Crece*

Intervalo	*Signo de f''*	*Comportamiento de f*
(-∞,0)	*Positiva*	*Cóncava hacia arriba*
(0,2)	*Negativa*	*Cóncava hacia abajo*
(2,∞)	*Positiva*	*Cóncava hacia arriba*

A continuación se muestra la gráfica de la función.



✓ ***Gráfica de $f(x)$ a partir de las gráficas de $f'(x)$ y $f''(x)$, y viceversa***

Iniciaremos dando la función y la gráfica de su derivada para hacer conjeturas de las características que debe tener la gráfica de la derivada.

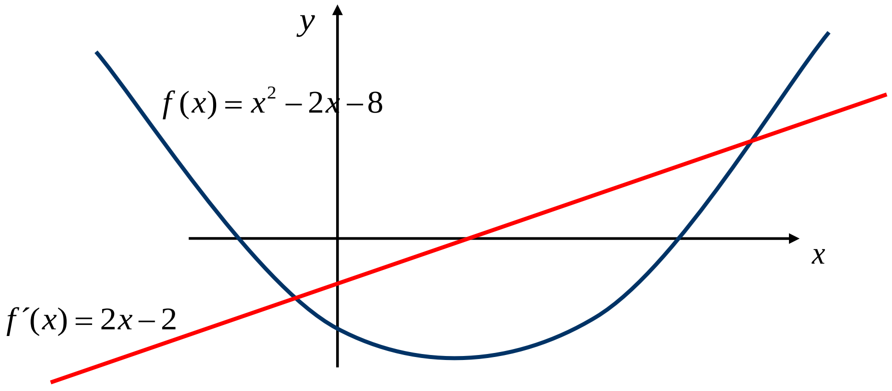
Dada la función f, trazaremos las gráficas de f y f', y haremos alguna conjeturas.

Ejemplo 17. Comenzaremos con la función.

$$f(x) = x^2 - 2x - 8$$

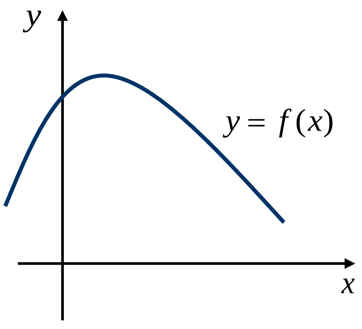
Solución.

Sabemos que la gráfica de la función f es una parábola, y la de su derivada una recta, dibujaremos una gráfica arriba de la otra, para iniciar el análisis.

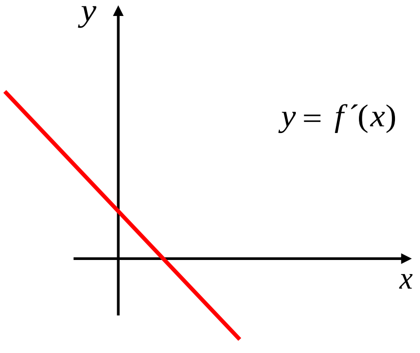


La función f crece en donde la derivada f' es positiva e inversamente, la derivada de la función f' es negativa cuando la función f es decreciente. Además en el punto crítico (que en este caso es un mínimo) la derivada f' de la función pasa por el eje x

Ejemplo 18. Dada la siguiente gráfica de f determina la gráfica de f'.



Solución: Podemos observar que antes del máximo la función es creciente así que la derivada de la función es positiva, en el punto máximo la derivada es cero y después de él, la función decrece así que la derivada debe ser negativa la gráfica de la función es del tipo siguiente:



➢ *Problemas de optimización.*

Es quizá la parte más importante de una teoría, es la aplicación que se hace de ella, el concepto de derivada, la hemos utilizado en la solución de varios tipos de problemas, entre ellos, razón de cambio, velocidad instantánea, y algunos más, en esta ocasión trataremos una aplicación más, ésta es la solución de problemas de optimización.

Ejemplo 19. Encuentra dos números positivos cuya suma sea 50 y cuyo producto sea lo más grande posible.

Solución: Denotemos por x a uno de los dos números, el otro número, por supuesto es $50-x$, luego entonces el producto está dado por

$$P(x)=x(50-x)=50x-x^2.$$

En este caso, el dominio de la función P, se puede restringir al intervalo [0,50], como sabemos los polinomios son continuos y en un intervalo cerrado debe tener un máximo y un mínimo. Los números $x=0$, $x=50$ hacen que el producto sea cero, el cual claramente no es el máximo, para encontrar el valor máximo, derivemos la función e igualemos a cero.

$$P'(x)=50-2x=0 \Rightarrow x=25$$

al derivar nuevamente, encontramos que

$$P''(x)=-2<0$$

Entonces por el criterio de la segunda derivada, el valor crítico corresponde a un máximo, el valor máximo es

$$P(25)=25(50-25)=625.$$

De esta manera los números pedidos son 25 y 25, cuya suma es 50 y el producto un máximo.

Ejemplo 20. Un pastizal de 20 000 m^2 sostiene a 20 vacas. Cada una tiene una producción diaria de 10 litros de leche. Al introducir una nueva vaca en el pastizal el rendimiento de cada vaca baja en un litro. ¿Cuál es el número de vacas que hay que poner para tener una producción máxima?

Solución: Estamos interesados en la producción de leche, esta está dada por

P = producción = 10(20) = 200 (sin vacas extras)
P = 9(21)=(10 -1)(20 +1) al introducir una vaca
P = (10 -2)(20 +2) al introducir dos vacas

En general si x representa al número de vacas que hemos de introducir, la producción P, se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned} P(x) &= (10-x)(20+x) \\ &= 200-10x-x^2. \end{aligned}$$

Para obtener su máximo, derivamos e igualamos a cero

$P'(x) = -10-2x = 0 \Rightarrow x = -5$, ahora $P''(x) = -2 < 0$,

por lo tanto hay un máximo en $x=-5$, esto quiere decir que si queremos una producción máxima debemos quitar 5 vacas y no introducir alguna, veamos; si la producción de leche disminuye en un litro al introducir una vaca y aumenta un litro al retirar una vaca, entonces quedarían 15 vacas produciendo 15 litros, con esto la producción sería de 225 litros, sin embargo, si la producción de leche por vaca no aumenta al retirar una vaca, entonces para obtener la máxima producción de leche no debemos retirar ni introducir vaca alguna.

Ejemplo 21. Encuentre la recta tangente a la curva $y = 6x^2 - x^3$ que tenga pendiente máxima.

Solución: La fórmula para predecir pendientes de las rectas tangentes (a una curva), en este caso, esta dada por $m(x) = 12x - 3x^2$ (la derivada de la función) y nos piden optimizar $m(x)$ para ello procedamos de manera usual.

$$m'(x) = 12 - 6x$$

de aquí $m'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$, además $m''(x) = -6 < 0$. Por lo tanto en $x = 2$, m tiene un máximo, cuyo valor es $m(2) = 12$ y este se da en el punto $(2,16)$ de la función dada inicialmente.

Finalmente, encontramos la ecuación de la recta tangente, como pasa por (2, 16) y tiene pendiente $m = 12$, usemos la forma punto pendiente de la recta.

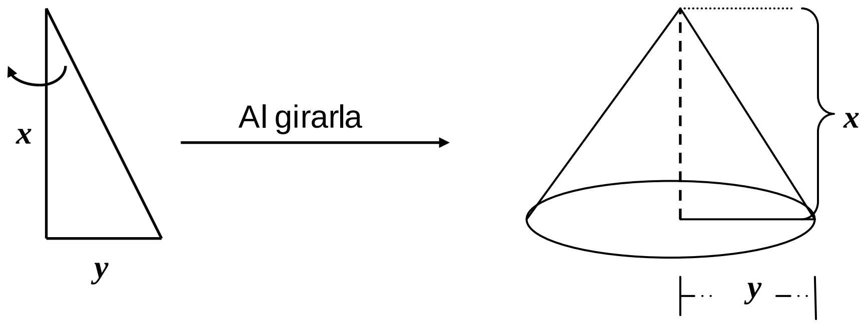
$$y - 16 = 12(x-2)$$

o

$$12x - y - 8 = 0.$$

Ejemplo 22. Un triángulo de hipotenusa dada gira alrededor de uno de sus catetos para generar un cono circular recto. Halla el cono de mayor volumen.

Solución: Observemos que se trata de un triángulo rectángulo, sean x y y las longitudes de sus catetos, el siguiente dibujo nos ayudará a resolver el problema



El volumen V del cono se puede expresar como $V=\pi xy^2$ pero tenemos dos variables. ¿De dónde podemos despejar alguna de ellas? Rápidamente notamos que nos falta un dato, la hipotenusa está dada, sea c el valor de ella (c constante) y usamos el teorema de Pitágoras

$x^2+y^2=c^2 \;\Rightarrow\; y^2=c^2-x^2$ (¿por qué preferimos despejar y^2 y no x?)

sustituimos en V, $\quad V(x)=\pi x(c^2-x^2)=\pi xc^2-\pi x^3$

optimizamos de la manera usual $\quad V'(x)=\pi c^2-3\pi x^2$

igualando a cero la primera derivada se tiene $x=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$

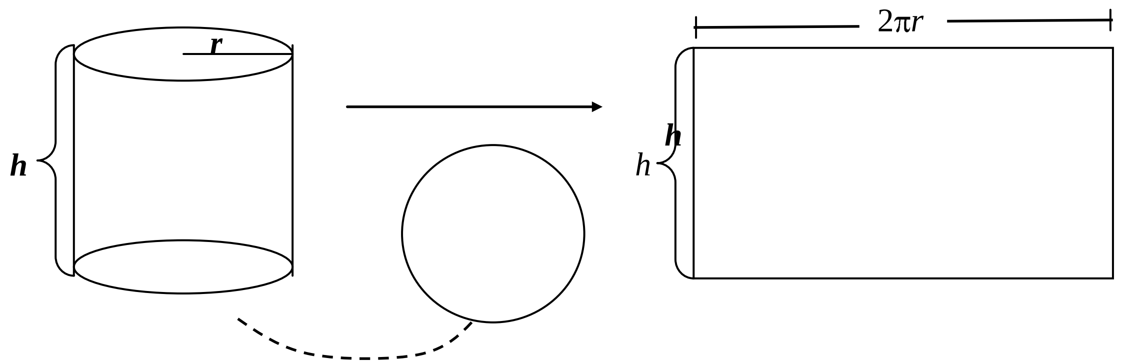
Calculemos la segunda derivada

$$V''(x)=-6\pi x$$

La segunda derivada en el valor crítico es negativa, por lo que hay un máximo en dicho punto.

Ejemplo 23. Un vaso cilíndrico de sección transversal circular ha de contener 200 cm^2 de material. ¿Qué dimensiones debe de tener para que contenga la mayor cantidad posible de líquido?

Solución: Sean r la longitud del radio de la base del cilindro y h la longitud de su altura, observemos que un cilindro está compuesto por un circulo (interior) y el cuerpo, que al extenderlo nos da un rectángulo (como se observa en la figura)



Las dimensiones del rectángulo son base $2\pi r$ y altura h, el área A del cilindro es, área del circulo + área del rectángulo, es decir,

$$A = \pi r^2 + 2\pi rh$$

Esta área debe de tener 200 cm^2, luego $\pi r^2 + 2\pi rh = 200$ (1)

Nos piden las dimensiones para que el vaso contenga la mayor cantidad posible de líquido, en otras palabras, nos piden un volumen V máximo, queremos optimizar la expresión

$$V = \pi r^2 h$$

de (1) se obtiene $h = \dfrac{200 - \pi r^2}{2\pi r}$ sustituyendo este valor en la fórmula del volumen

$$V = \pi r^2 \left(\frac{200 - \pi r^2}{2\pi r} \right) = 100 r - \frac{1}{2}\pi r^3.$$

La primera derivada de la función es

$$V'(r) = 100 - \frac{3}{2}\pi r^2 \text{ cuyo punto crítico es } r = 5\sqrt{\frac{8}{3\pi}}$$

la segunda derivada

$$V''(r) = -3\pi r < 0, \text{ para } r > 0,$$

como es el caso, por lo tanto la función tiene un máximo en el punto crítico, calculemos ahora las dimensiones que nos piden

$$h = \frac{200 - \pi\left(25\dfrac{8}{3\pi}\right)}{10\sqrt{\dfrac{8}{3\pi}}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}}, \quad r = 5\sqrt{\frac{8}{3\pi}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

Utilizando la función: $f(x)=x^3-3x+1$*, responde las preguntas 1 y 2.*

1) La función f tiene puntos críticos, en:

A) $x=0$ y $x=1$ B) $x=2$ y $x=-1$ C) $x=-2$ y $x=1$
D) $x=1$ y $x=-1$ E) $x=-1$ y $x=0$

2) El intervalo donde la función f es decreciente es:

A) $1,\ \infty$ B) $-1,1$ C) $-1,0$ D) $-\infty,-1$ E) $-\infty,1$

3) La función $f(x)=x^5-5x-9$ tiene dos puntos críticos, en:

A) 2 y 0 B) 3 y – 1 C) –2 y 1 D) 1 y – 1 E) – 2 y 0

4) Considera la función $f(x)=4x^3+21x^2-90x+15$, los valores críticos de esta son:

A) $x_1=-5,\ x_2=\dfrac{3}{2}$ B) $x_1=-5,\ x_2=3$ C) $x_1=2,\ x_2=5$

D) $x_1=0,\ x_2=\dfrac{3}{2}$ E) $x_1=-\dfrac{5}{2},\ x_2=\dfrac{2}{3}$

5) Un intervalo donde la función $f(x)=x^3-3x+1$ es decreciente en:

A) $-1,\ \infty$ B) $-1,1$ C) $-1,0$ D) $-\infty,-1$ E) $-\infty,1$

6) El intervalo donde la función $f(x)=-2x^2+x+6$ es creciente en:

A) $\left(\dfrac{1}{4},\infty\right)$ B) $\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$ C) $\left(-\dfrac{3}{2},2\right)$ D) $\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right)$ E) $\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right)$

7) El punto máximo de la curva cuya ecuación está dada por $y=-6x^2+12x-3$ es:

A) (3, -1) B) (1, 3) C) (-1, 4) D) (-1, -3) E) (1, -3)

8) La función $f(x)=x^4-4x^3$ tiene un mínimo en:

A) $x=0$ B) $x=2$ C) $x=3$ D) $x=4$ E) $x=5$

9) Los intervalos en donde la gráfica de la función $y = \frac{1}{30}x^6 - \frac{5}{6}x^4 + \frac{9}{2}x^2$ es cóncava hacia abajo son:

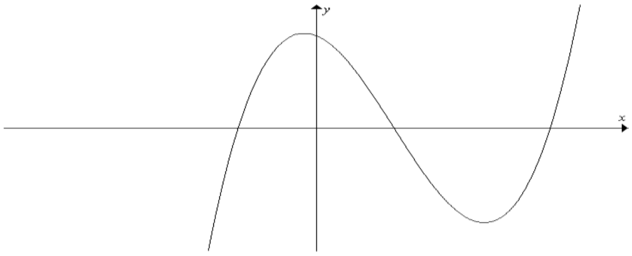
A) (-3, -1); (-1, 1) B) (-3, -1); (1, 3) C) (-1, 1); (3,∞)

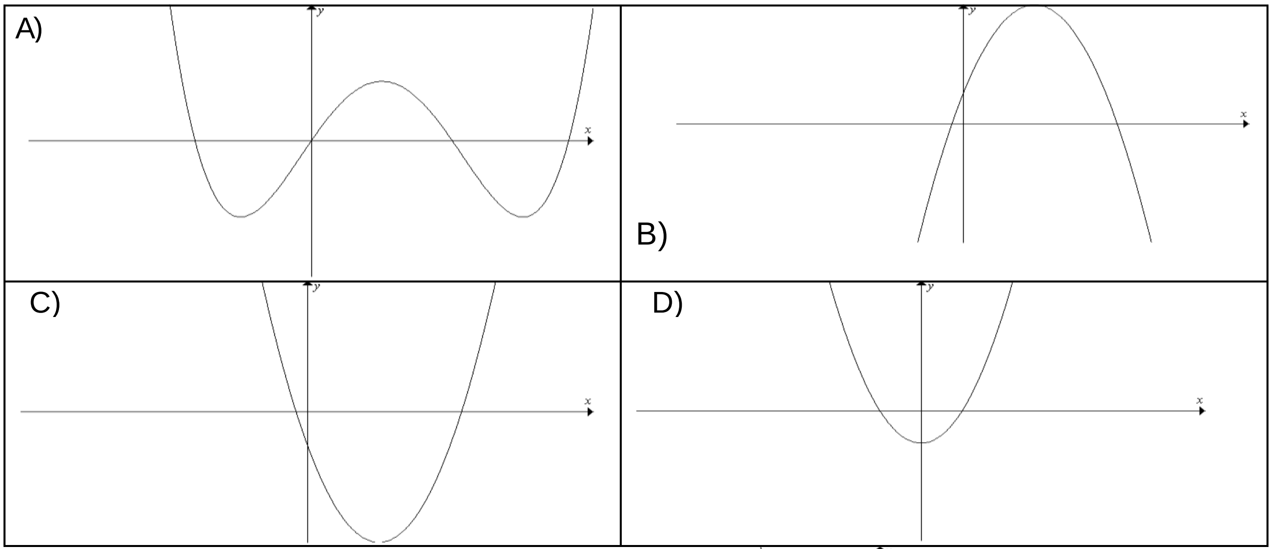
D) (-∞, -3); (3,∞) E) (-∞, -3); (-1, 1)

10) El intervalo donde la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ es cóncava hacia abajo es:

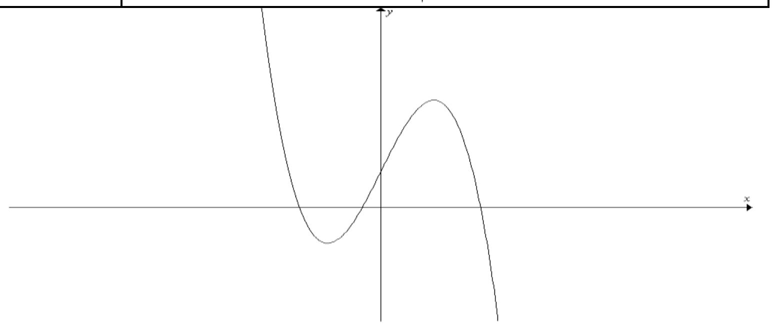
A) $(-\infty,0)$ B) $(0,2)$ C) $(-\infty,1)$ D) $(2,\infty)$ E) $(1,\infty)$

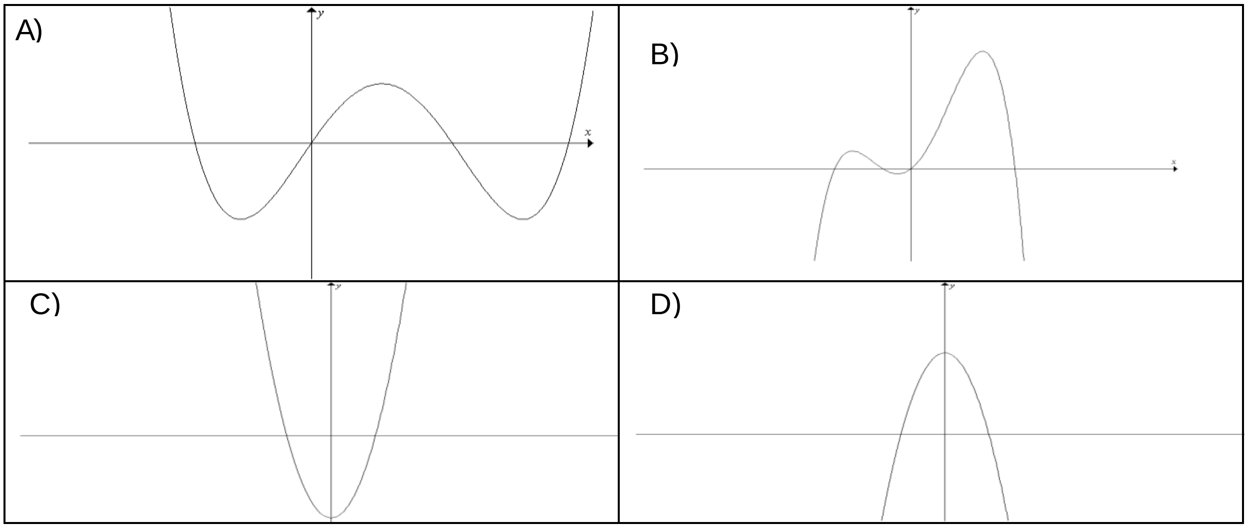
11) La gráfica de la derecha representa la función f, de las gráficas siguientes, elige la gráfica que representa $f'(x)$.



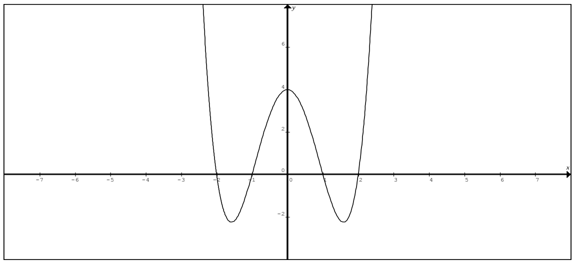


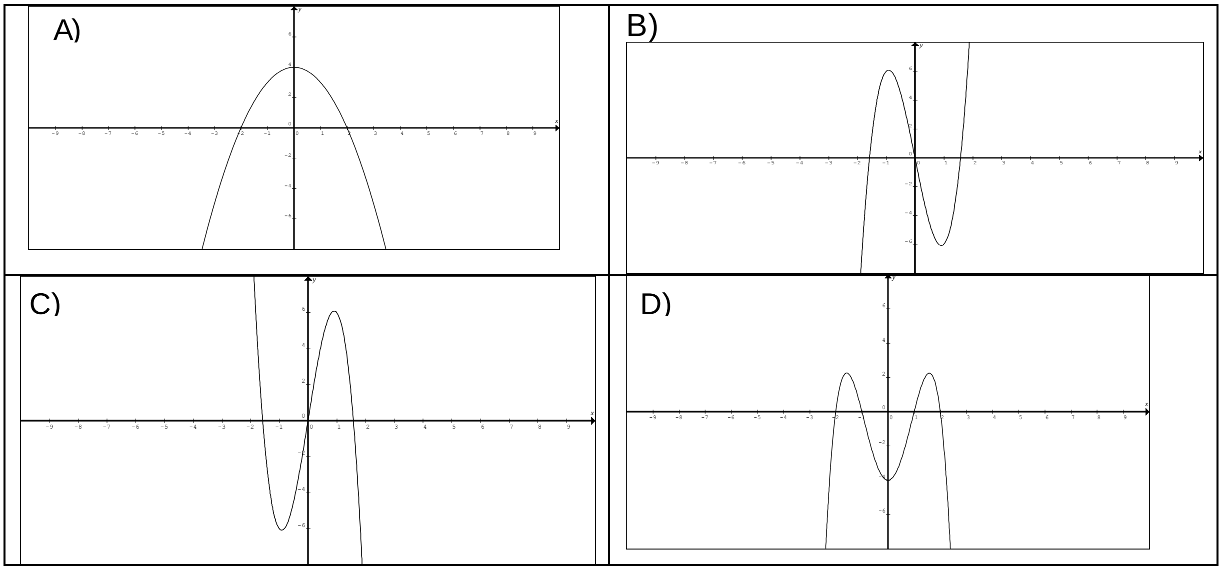
12) La gráfica de la derecha representa la función f, de las gráficas siguientes, elige la gráfica que representa $f'(x)$



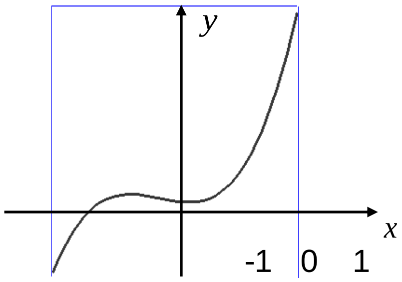


13) La gráfica de la derecha representa la función f**.** De las gráficas siguientes, elige la gráfica que representa $f'(x)$.

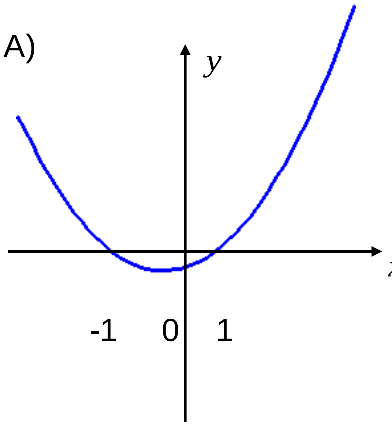




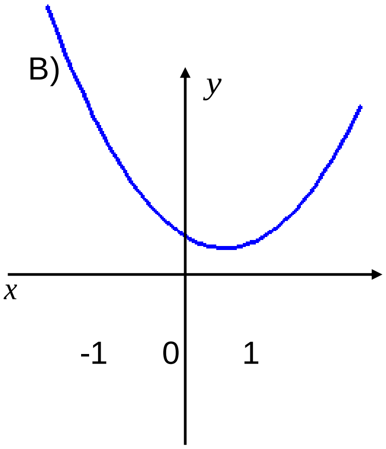
14) En el lado derecho se te muestra la gráfica de una función f, elige de las siguientes gráficas a la gráfica de su derivada



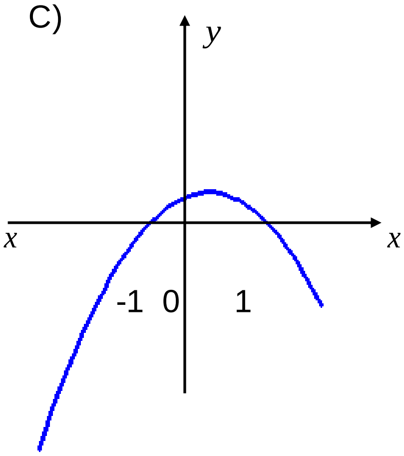
A)



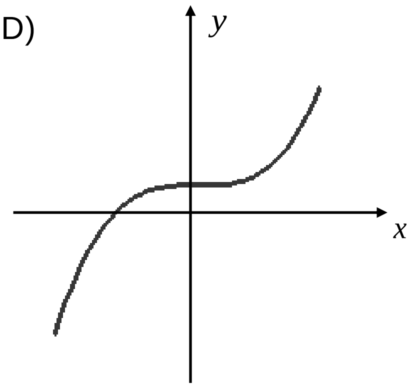
B)



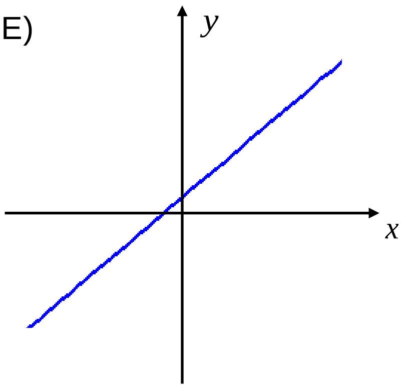
C)



D)



E)



15) La derivada f' de una función f dos veces derivable en todo número real, satisface que:

i) $f'(x) < 0$ para $x < 2$.

ii) $f'(x) > 0$ para $2 < x < 5$.

iii) $f'(x) < 0$ para $x > 5$, luego f cumple que:

A) tiene un máximo local en $x = 2$ B) tiene un mínimo local en $x = 5$

C) tiene un máximo local en $x = 5$

D) la gráfica de f se abre hacia arriba en [3, 8]

E) la gráfica de f se abre hacia abajo en [0, 4]

16) Hallar dos números cuya suma sea 20 y de forma que el producto P de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo:

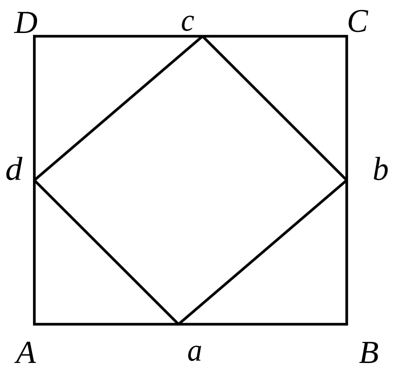
A) 50, 30 B) $\frac{40}{3}, \frac{20}{3}$ C) 5, 3 D) $\frac{40}{5}, \frac{20}{5}$ E) 4, 2

17) Un granjero tiene 1200 m de cerca y desea cercar un campo rectangular que limita con un río recto. No necesita cercar a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones del campo que tiene el área más grande?
Si las dimensiones del campo rectangular son: $x =$ base y $y =$ altura.

A) $x = 300\,m$, $y = 300\,m$ B) $x = 300\,m$, $y = 600\,m$ C) $x = 600\,m$, $y = 600\,m$
D) $x = 600\,m$, $y = 300\,m$ E) $x = 400\,m$, $y = 400\,m$

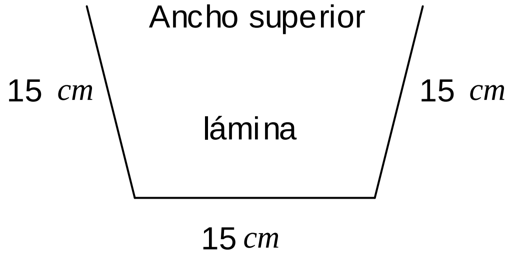
18) Sea el cuadrado $ABCD$ (observa la figura). Si el lado AB mide 10 dm y las longitudes Aa, Bb, Cc, Dd son iguales y el área del cuadrilátero $abcd$ es mínimo, entonces la longitud Aa es igual a:

A) 10 dm B) 5 dm C) 6 dm D) 3.5 dm E) 8 dm



19) Se construye una canaleta de sección trapezoidal soldando tres fajas de latón de 15 cm de ancho cada una. Se coloca la del centro horizontal y las otras inclinadas simétricamente a los lados. Si el área de la sección ha de ser la máxima posible. ¿Cuál será el ancho superior de la canaleta?

A) 15 cm B) 45 cm C) 30 cm D) 50 cm E) 27.5 cm



20) Determina el área del rectángulo más grande que se pueda inscribir en un triángulo rectángulo con catetos cuyas longitudes son de 3 cm y 4 cm, respectivamente, si dos de los lados del rectángulo se encuentran a lo largo de los catetos:

A) 12 cm^2 B) 6 cm^2 C) 8 cm^2 D) 3 cm^2 E) 10 cm^2

21) El área máxima de un rectángulo inscrito en un círculo de radio 2 cm es:

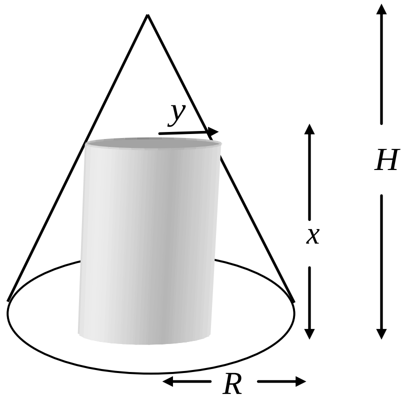
A) 8 cm^2 B) $\sqrt{2}$ cm^2 C) 2 $\sqrt{2}$ cm^2 D) 2 cm^2 E) 4 cm^2

22) El volumen máximo del cilindro circular recto que puede inscribirse en un cono de radio en la base de 6 cm. y altura de 12 cm., de tal forma que los ejes del cilindro y del cono coincidan es de:

A) $36\pi cm^3$ B) $72\pi cm^3$ C) $64\pi cm^3$ D) $6\pi cm^3$ E) $18\pi cm^3$

Para el problema siguiente responde las preguntas 8, 9 y 10.

Problema: Encuentra la altura del cilindro de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto dado.



23) El volumen (V) del cilindro en función de su altura (x), es:

A) $V(x)=\pi x^2(H-x)$ B) $V(x)=\pi\dfrac{(H-x)}{H}$ C) $V(x)=\pi\left(\dfrac{R(H-x)}{H}\right)^2$

D) $V(x)=\pi x\dfrac{(H-x)}{H}$ E) $V(x)=\pi x\left(\dfrac{R(H-x)}{H}\right)^2$

24) La derivada del volumen (V) del cilindro de la pregunta anterior respecto de la altura x del cilindro es:

A) $V'(x)=\pi\left(R-\dfrac{R}{H}x\right)$ B) $V'(x)=\pi\left(R-\dfrac{R}{H}x\right)\left(R-\dfrac{3R}{H}x\right)$

C) $V'(x) = \pi\, x\left(R - \dfrac{R}{H}\, x \right)$ D) $V'(x) = \pi\left(R\, \dfrac{3R}{H}\, x \right)$

E) $V'(x) = \left(R - \dfrac{R}{H}\, x \right)\left(R - \dfrac{3}{H}\, x \right)$

25) La altura del cilindro de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto dado es:

A) altura = $\dfrac{1}{2}H$ B) altura = $\dfrac{3}{4}H$ C) altura = $\dfrac{5}{7}H$

D) altura = $\dfrac{2}{5}H$ E) altura = $\dfrac{1}{3}H$

RESPUESTAS

UNIDAD 1. PROCESOS INFINITOS Y LA NOCIÓN DE LÍMITE

TEMA. PROCESOS INFINITOS

1) D 2) C 3) B 4) C 5) C 6) A 7) B 8) C 9) B 10) D
11) A 12) C 13) B 14) E 15) D 16) C

UNIDAD 2. LA DERIVADA: ESTUDIO DE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO

1) D 2) A 3) B 4) D 5) E 6) C 7) D 8) D 9) B 10) B

11) 12) B 13) A 14) C 15) D 16) A

UNIDAD 3. DERIVADA DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

1) D 2) C 3) B 4) C 5) E 6) E 7) A 8) B 9) B 10) A
11) A 12) A 13)B 14) C 15) D 16) D 17) D 18) 19) E 20) A
21) B 22) A 23) A 24) D 25) E 26) 27) D 28) B 29) D

1) A 2) E 3) A 4) B 5) A 6) A 7) B 8) E 9) C 10) A
11) E 12) C 13) D 14) B 15) E 16) A 17) A 18) C 19) E 20) C
21) C 22) E 23) D 24) B 25) C 26) D 27) C

UNIDAD 4. COMPORTAMIENTO GRÁFICO Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN

TEMA. COMPORTAMIENTO GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN

1) D 2) B 3) D 4) A 5) D 6) E 7) E 8) B 9) C 10) B
11) C 12) D 13) B 14) A 15) C 16) B

TEMA. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

16) B 17) D 18) B 19) C 20) D 21) A 22) C 23) E 24) B 25) E

BIBLIOGRAFÍA

1. Edwards y Penney, *Cálculo con Geometría Analítica* (4° Edición)
   Prentice Hall Hispanoamericana.

2. Elliott Mendelson, *Introducción al Cálculo*
   McGraw - Hill

3. Alejandra G. Bravo, et al, *Cálculo Diferencial e Integral II* (Guía para el examen extraordinario), Departamento de Impresiones del Plantel del Oriente del CCH.

4. Allan B. Cruse - Milliane Granberg, *Lectures on fresman calculus*
   Addison - Wesley Publishing Company.

5. Álvaro Pinzón, *Cálculo II, Integral,* (Edición revisada)
   Harla, SA de CV, Harper & Row Latinoamericana

   \- *Cálculo I, diferencial.*
   Harla, SA de CV, Harper & Row Latinoamericana

6. James Stewart et - al, *Calculus, early transcendentals*, (3ª edición)
   Brooks/Cole Publishing Company

7. Louis Leithold, *El Cálculo con Geometría Analítica,* (4ª Edición)
   Harla, SA de CV, Harper & Row Latinoamericana

8. Earl W. Swokowski, *Cálculo con Geometría Analítica*
   Wadsworth Internacional Iberoamérica.

9. Morris Kline, *Matemáticas para los estudiantes de humanidades.*
   Fondo de Cultura Económica, México.

10. Edwin J Purcell - Dale Verberg, *Cálculo con Geometría Analítica,* (6ª Edición)
    Prentice Hall Hispanoamericana, SA.

11. Larson - Hostetler, *Cálculo y Geometría Analítica,* (2ª Edición)
    McGraw - Hill.

12. Tom M. Apostol, *Calculus,* (Volumen 1, 2ª Edición)-
    Editorial Reverté, SA.

13. James Stewart, *Cálculo conceptos y contextos*
    International Thomson Editores.