UNIDAD 1

PROCESOS INFINITOS Y LA NOCIÓN DE LÍMITE

Propósitos. Explorar diversos problemas que involucren procesos infinitos a través de la manipulación tabular, gráfica y simbólica para propiciar un acercamiento al concepto de límite.

En la ***Unidad*** *siguiente, pretendemos que:*
- Resuelvas problemas de diversos contextos que involucran en su solución, procesos infinitos.
- Utilices las representaciones gráfica, tabular y algebraica de un proceso infinito para analizar su comportamiento en cuanto a: cómo cambia la variable, qué comportamiento sigue, cuáles son los valores siguientes, qué tan parecidos son y a la larga, cómo son éstos.

➢ PROCESOS INFINITOS.

Definición. *Proceso Infinito*, entenderemos por Proceso a toda acción que produzca un resultado, será infinito, si cada vez que tengamos una acción se puede realizar la acción siguiente.

Ejemplo 1. Considera el proceso siguiente en el cual se muestran las primeras cuatro acciones a las que le llamaremos *pasos*. Determina si es infinito o no.

$$\sqrt{5},\ \sqrt{5\sqrt{5}},\ \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}},\ \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}}\ ,...$$

Solución. En el primer paso debemos calcular la raíz de cinco, es decir, $\sqrt{5}$ $\approx$ 2.236067977 (aproximación a 9 dígitos). En la segunda acción debemos calcular $\sqrt{5\sqrt{5}}$ cuyo valor a 9 dígitos es; 3.343701525, a cada nueva acción se le multiplica por cinco y se vuelve a extraer la raíz cuadrada, como se puede hacer la acción siguiente, este proceso es infinito[1].

Ejemplo 2. Evalúa la función $a(n) = n^2$ para sus primeros ocho valores, con n un número natural.

En forma de tabla podemos escribir los primeros ocho valores de la función a los que llamaremos términos de la función como:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$a(n)$	1	4	9	16	25	36	49	64

[1] Un conjunto es infinito, si se puede hacer corresponder una biyección entre el conjunto y un subconjunto propio de él. Nota de la redacción.

Sin embargo podemos dar números naturales mayores a 8 y continuar evaluando a la función descrita anteriormente, dado que este proceso (evaluar a la función) es infinito, podemos decir que el número n crece tanto como queramos.

Definición. Un número n *crece indefinidamente*, si cada vez que se da un número natural M, se tiene que: $n > M$. En este caso diremos que n tiende a infinito y lo denotamos por $n \to \infty$.

Observa que ∞ *no es un número*.

En la literatura matemática a las funciones que tienen como dominio a los números naturales se les expresa como a_n en lugar de $a(n)$, así en el ejemplo anterior tendríamos como primer término $a(1) = a_1 = 1$, como segundo término $a(2) = a_2 = 4$ y así sucesivamente.

Ejemplo 3. Considera a la función $a_n = \frac{n+1}{n}$, calcula los primeros once términos, observa su comportamiento y conjetura un valor cuando n crece indefinidamente.

Solución: El primer término es $a_1 = \frac{1+1}{1} = \frac{2}{1} = 2$, el segundo $a_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$ resumiendo este proceso en una tabla se tiene para los primeros once términos.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	2	1.5	1.33	1.25	1.2	1.167	1.143	1.125	1.11	1.1	1.09

Como nos damos cuenta, los términos de a_n decrecen conforme el valor de n crece, pero no decrecen arbitrariamente, ellos se van aproximando al número 1, podemos conjeturar que si $n \to \infty$ entonces a_n se aproxima a 1.

En Matemáticas cuando una expresión, en nuestro caso una función a_n, se aproxima a un número L (en el ejemplo al número 1), escribimos $a_n \to L$ (en el ejemplo $a_n \to 1$).

En general, decimos que una expresión a_n se aproxima a un número L, cuando n crece indefinidamente, si la distancia $|a_n - L|$ entre ellos es cada vez más pequeña y lo escribimos de la manera siguiente: $a_n \to L$ si $n \to \infty$, estas expresiones se sintetizan con la notación siguiente:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \qquad (1)$$

Es muy útil saber el valor de $\lim_{n\to\infty} r^n$ cuando r es un número que está entre -1 y 1, en símbolos $-1<r<1$, con este propósito, realicemos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4. Calcula $\lim_{n\to\infty} r^n$ cuando $-1<r<1$.

Solución: Para fijar ideas tomemos un valor de r en el intervalo $(-1,1)$ por ejemplo $r=0.7$ y observemos los valores de r^n cuando n crece, iniciemos con $n=1$ $r^1=r=0.7$, después $n=2$, $r^2=(0.7)^2=0.49$ continuemos de esta manera y hagamos un resumen de estos resultados en una tabla, los valores de r^n para los primeros once enteros consecutivos son:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r^n	0.7	0.49	0.343	0.2401	0.16807	0.117649	0.082	0.057	0.04	0.028	0.01977

Se puede observar que conforme n crece la función r^n decrece, pero el decrecimiento no es caótico, si no que se aproxima al número cero, en símbolos, expresamos este comportamiento como:

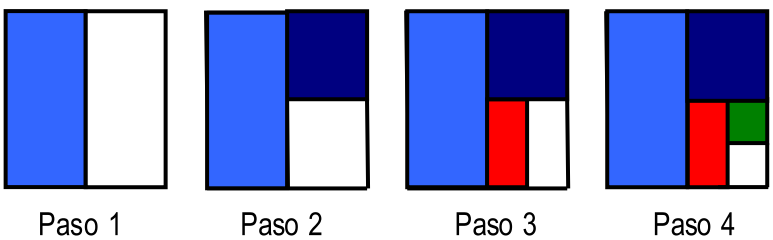
$$\lim_{n\to\infty} (0.7)^n = 0$$

Para cualquier otro número entre -1 y 1, la función se comporta de manera parecida, como ejercicio se te pide que tomes otros valores de r y realices las mismas operaciones, para que puedas concluir que:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \quad \text{siempre y cuando } -1<r<1. \qquad (2)$$

Ejemplo 5. Un cuadrado de lado 1 se divide a la mitad y se pinta una de las dos partes, posteriormente, la mitad no pintada se divide a la mitad y una de estas mitades se vuelve a pintar (como se muestra en la figura). Si se repite este proceso indefinidamente:

¿Cuál es el área de la superficie que se pinta en cada paso? ¿Cuánto vale la suma de estas áreas en cada paso? ¿A qué número se aproxima tanto el área de la superficie en cada paso así como la suma de ellas?



Solución. En este problema se consideran dos cantidades, el área de la superficie sombreada y la suma de las áreas de las superficies pintadas en cada paso, a las que denotaremos por a_n y S_n respectivamente.

De esta manera se tendrá, para los primeros cuatro pasos;

Área a_n	Suma S_n
$a_1 = \frac{1}{2} = 0.5$	$S_1 = \frac{1}{2} = 0.5$
$a_2 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.25$	$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0.5 + 0.25 = 0.75$
$a_3 = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.125$	$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0.875$
$a_4 = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.0625$	$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0.9375$

Observa, tanto de la figura, como en la tabla que: el área a_n es cada vez más pequeña en un medio del área anterior, así el área $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ se aproxima al número cero (Por (2) ya que $-1 < \frac{1}{2} < 1$), en símbolos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Por otra parte (Observa la figura así como a los valores de la tabla) la suma de las áreas S_n es cada vez más grande en cada paso, S_n se aproxima al número uno, en símbolos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

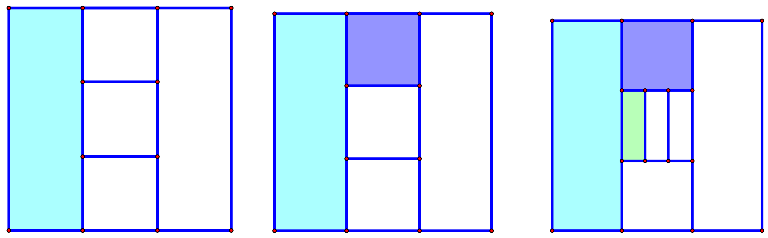
Pero la suma se puede escribir de la forma:

$$S_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

De esta manera tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1$$

Ejemplo 6. Un cuadrado de lado 1 se divide en tres partes iguales y una de ellas se sombrea (paso 1). A una de las partes sobrantes se le divide en tres partes iguales y a una de ellas también se le sombrea (paso 2). Este proceso se repite indefinidamente. ¿Cuánta área de la superficie se pinta en cada paso? ¿Cuánto vale la suma de las áreas en cada paso? ¿A qué número se aproxima tanto el área en cada paso como la suma?



Paso 1 Paso 2 Paso 3

Solución:

Como en el ejercicio anterior, se consideran dos cantidades, el área de la superficie sombreada y la suma de las áreas de las superficies sombreadas en cada paso, a las que denotaremos por a_n y S_n respectivamente. Haremos una síntesis de sus valores en cada paso, resumiendo los resultados en la tabla siguiente (se muestran los primeros cuatro pasos):

Paso	Área a_n	Suma S_n
1	$a_1 = \frac{1}{3}$	$S_1 = \frac{1}{3} \approx 0.3333\bar{3}$
2	$a_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$	$S_2 = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \approx 0.4444\bar{4}$
3	$a_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$	$S_3 = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{13}{27} \approx 0.48148$
4	$a_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4$	$S_4 = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{40}{81} \approx 0.493827$

Nos damos cuenta que el área de la superficie sombreada en cada paso varia en un tercio del área anterior, por lo que a_n es cada vez más pequeña en un tercio conforme n crece, su término general es $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, además $-1 < \frac{1}{3} < 1$ y por (2) se tiene

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

Por otra parte, el proceso en la figura nos indica que, se sombrea una parte igual a la que ya no se toma en cuenta, así, es claro que la suma de las áreas de las superficies debe ser la mitad del área del cuadrado. En símbolos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 7. Con base en los límites siguientes:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=1$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\frac{1}{2}$$

Conjetura el valor de los límites siguientes:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$

Solución: Podemos observar que el esquema es: el límite es igual a una razón con numerador uno y denominador un número menor en el denominador común, de esta forma se tiene:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)=\frac{1}{3}$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)=\frac{1}{4}$

Pero, ¿qué nos permite calcular estas sumas infinitas de esta forma? Para contestar a esta pregunta, primero, hagamos algunas observaciones y al mismo tiempo definamos los términos con los que estamos trabajando.

En el segundo ejemplo a_n tenía el valor de $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ a la expresión $\frac{1}{2}$ se le conoce con el nombre de razón (cociente de dos números naturales) y se denota comúnmente con la letra r, así $a_n=r^n$,

Definición: En una sucesión geométrica (una sucesión es una función con dominio los números naturales), con primer término a y razón común r, el $n-$ *ésimo* término puede determinarse como:

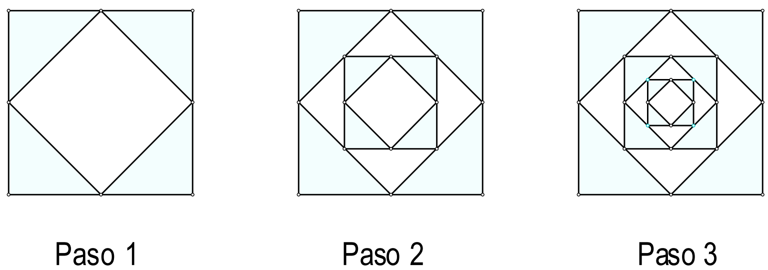
$$a_n = ar^{n-1}$$

De esta manera en nuestro segundo ejemplo $a=1$ y $r=\frac{1}{2}$, en el tercer ejemplo, también $a=1$, pero $r=\frac{1}{3}$

Hay varios ejemplos de sucesiones geométricas, aquí daremos sólo algunas.

Término general	*Primeros 5 términos*
$3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ o $\frac{3}{2^{n-1}}$	$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}$
$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ o $\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$	$\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}$
$2\left(\frac{1}{10}\right)^{n}$	$\frac{2}{10}, \frac{2}{10^2}. \frac{2}{10^3}, \frac{2}{10^4}, \frac{2}{10^5}$
$-1^{\ n}$	-1, 1, -1, 1, -1

Ejemplo 8. Los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado 1 se unen para formar un cuadrado nuevo. Este procedimiento se repite para cada nuevo cuadrado (como se muestra en la figura) Calcula la suma de las áreas de los triángulos sombreados.



Solución: Denotaremos por a_n el área de cada triángulo en cada paso, y por S_n el área total sombreada, hagamos un resumen mediante la tabla siguiente.

Paso	*Area de cada triangulo* a_n	*Área total sombreada* S_n
1	$\frac{1}{8}$	$4\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2}+4\left(\frac{1}{32}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$
3	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{2}+4\left(\frac{1}{32}\right)+4\left(\frac{1}{128}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}$

Podemos observar que:

$$\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3},\ \frac{1}{32}=\left(\frac{1}{2}\right)^{5},\ \frac{1}{128}=\left(\frac{1}{2}\right)^{7},\ \cdots$$

La variable a_n, área de cada triángulo, es cada vez más pequeña, decrece en $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ en cada paso, así el área a_n se aproxima a cero (por (2)), en símbolos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Por otra parte la suma de las áreas S_n se hace cada vez más grande, para calcular su suma procedamos de la manera siguiente:

$$S_n = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$ Multiplicamos por $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ a S_n

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$ Restamos

$$S_n - \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_n = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

Como $$S_n - \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_n = \frac{3}{4} S_n$$

Tenemos $$\frac{3}{4} S_n = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

En este caso $-1 < r = \frac{1}{2} < 1$, y por (2)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = 0$$

De esta manera, S_n se aproxima a $\frac{2}{3}$

El procedimiento llevado a cabo en este ejercicio (para obtener el valor del límite de S_n) es típico para las series geométricas y así poder obtener su suma en términos de n, antes de continuar daremos la definición de los símbolos que estamos manejando.

En los ejemplos que hemos ilustrado, se han realizado sumas de áreas en un proceso infinito, estas sumas, reciben el nombre de sumas parciales, y en general, cuando se tiene una sucesión a_n, se van formando las sumas parciales de ella, de la manera siguiente:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$.$$

$$
\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \end{array}
$$

Observa que las sumas parciales, forman a su vez una nueva sucesión, al límite de esta sucesión (en caso de existir), se le conoce con el nombre de serie. Esta observación nos permite hacer la definición siguiente:

> **Definición**: La serie infinita
> $$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$
> Se dice que tiene una suma S, si los términos de su sucesión de sumas parciales
> $$S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots$$
> Se acercan arbitrariamente a S conforme el valor de n crece indefinidamente.

Para la serie geométrica $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$ consideremos su suma parcial S_n que en este caso es:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n \qquad (3)$$

Multiplicando (3) por r

$$rS_n = \quad ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + ar^{n+1} \qquad (4)$$

Restamos (3) de (4)

$$(1-r)S_n = a - ar^{n+1} = a(1-r^{n+1})$$

$$S_n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \qquad \text{siempre que } r \neq 1$$

De esta manera

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} = \frac{a}{1-r} \qquad (5)$$

Siempre y cuando la razón r sea tal que $|r| < 1$(por (2)).así hemos calculado la suma de una serie geométrica que enunciamos de la manera siguiente:

> La suma de la serie geométrica $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$ es
> $$S = \frac{a}{1-r}$$
> Siempre que $|r| < 1$, Si $|r| \geq 1$ la serie no tiene suma.

Observa que el valor de una serie, depende del valor de la razón común r .

Ejemplo 9. Encuentra la suma, si existe, de la serie geométrica

$$1+\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+\cdots$$

Solución: La serie se puede escribir como:

$$1+\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+\cdots=1+\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\cdots$$

La serie tiene razón común $r=\frac{2}{5}$ con $a=1$, así por (5)

$$1+\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{2}{5}}=\frac{1}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{3}$$

Ejemplificamos ahora, una serie que ha causado polémica en varios ámbitos.

Ejemplo 10. ¿La expresión 0.999999… es menor, igual o mayor, a 1?

Solución: Sabemos desde la primaria que $0.9=\frac{9}{10}$ y que $0.99=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}$ así, podemos escribir

$$0.999...=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots$$

Por otra parte

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots=9\left[\left(\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=9\left[\left(\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^3+\cdots\right]=9\left[\frac{1}{1-\frac{1}{10}}-1\right]=9\left(\frac{10}{9}-1\right)=10-9=1$$

(Observa que la suma no inicia en 1, así que en el resultado final se le resto)

1) $\frac{1}{9}$ = 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + … representa un proceso

A) Periódico B) Discreto C) Aleatorio D) Infinito E) Finito

2) El valor del cuarto término de la sucesión $a_n = \frac{n^2+16}{4^n}$ es:

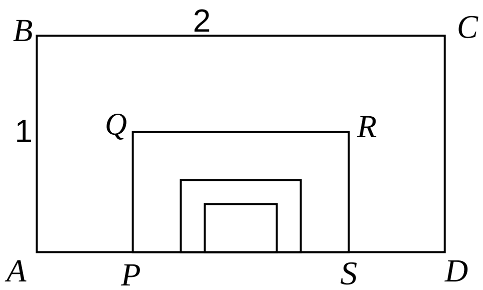
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{32}$

3) Considera la función $a_n = \frac{4-2n}{2(n+1)}$, cuyo dominio son los números naturales, entonces los primeros valores de la sucesión generada por a_n son:

A) $\frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, \ldots$ B) $\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, \ldots$ C) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, 1, \ldots$

D) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ E) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \ldots$

4) Las dimensiones del rectángulo $ABCD$ son de 1 por 2. El rectángulo siguiente, $PQRS$, tiene dimensiones ½ x 1. De igual modo, cada rectángulo interior tiene la mitad de las dimensiones que el rectángulo precedente. Si esta sucesión de rectángulos continúa hasta el quinto rectángulo, ¿cuál es la suma de las áreas de todos los rectángulos?



A) 1/64 B) 1/25 C) 1/128 D) 1/512 E) 1/1024

5) El valor de la suma de la serie infinita $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$ es igual a:

A) 0 B) 10 C) 1 D) 20 E) 100

6) El resultado de la suma infinita $\frac{6}{10}+\frac{6}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\frac{6}{10^4}+\ldots$ es:

A) $\frac{2}{3}$ B) 1 C) 0 D) $\frac{1}{3}$ E) 6

7) La suma 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + . . . es igual a:

A) $\frac{11}{10}$ B) $\frac{10}{9}$ C) $\frac{11}{9}$ D) ∞ E) 2

8) Considera la sucesión siguiente:

$a_1 = 2$; $a_2 = 2\sqrt{2}$; $a_3 = 2\sqrt{2\sqrt{2}}$; $a_4 = 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; $a_5 = 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$;...

entonces el valor de $\lim_{n\to\infty} a_n$ es:

A) 2 B) 1 C) 4 D) ∞ E) 5

Un segmento de longitud uno, se divide a la mitad y se pinta de azul la primera mitad, lo que resta se divide a la mitad y se pinta de azul la primera mitad y así sucesivamente. Completa la siguiente tabla para ayudarte a responder las preguntas 9, 10 y 11.

Número divisiones (n)	*Longitud de la parte pintada en esa división* (a_n)	*Longitud total del segmento pintado* (S_n)
1	$\frac{1}{2}$	
2		$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0.75$
3		
4		
5		
6 . . .		

9) La longitud del enésimo segmento pintado (a_n) es:

A) $\frac{1}{n}$ B) $\frac{1}{2^n}$ C) $\frac{1}{2n}$ D) $\frac{1}{n^2}$ E) $\frac{1}{2}$

10) La suma de los 4 primeros segmentos pintados (S_4) es:

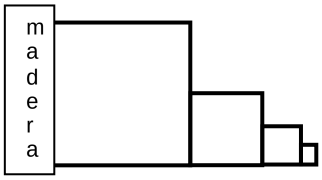
A) $S_4 = \frac{1}{4}$ B) $S_4 = \frac{3}{4}$ C) $S_4 = \frac{1}{2^4}$ D) $S_4 = \frac{15}{16}$ E) $S_4 = \frac{5}{16}$

11) $\lim_{n\to\infty} S_n$ es igual a:

A) 1 B) 0 C) ∞ D) no existe E) 2

Con la información del problema siguiente, responde las preguntas 12, 13, 14 y 15.

Se tiene un trozo de alambre y cortándolo se pretende formar cuadrados según la siguiente secuencia: el primero con un centímetro de lado pero como se apoyará en un trozo de madera, sólo se considerarán tres lados de alambre; el siguiente cuadrado con ½ cm de lado, pero como se colocará junto al anterior, sólo se considerarán nuevamente tres lados; el tercero tendrá como lado la mitad del anterior, es decir ¼ cm, igualmente pegado tal que sólo consideraríamos de nuevo tres lados y así sucesivamente, como se muestra en la figura.



Completa la tabla siguiente para ayudarte a responder las preguntas propuestas.

Cuadrado número: (n)	*Perímetro de cada cuadrado* (a_n)	*Perímetro total de los cuadrados* (S_n)
1	3	
2		$3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}=4.5$
3		
4		
5	$\frac{3}{2^4}=\frac{3}{16}=0.1875$	
6 . . .		

12) ¿Este es un proceso infinito?

A) No porque el perímetro total de los cuadrados, S_n, tiene un límite.

B) Sí porque el perímetro total de los cuadrados, S_n, es infinito.

C) Sí porque siempre es posible encontrar el siguiente valor del perímetro.

D) No porque el trozo del alambre no es infinito.

E) Si porque el trozo del alambre teóricamente tendría que ser infinito.

13) El perímetro del enésimo cuadrado (a_n) es:

A) $\frac{3}{2n-1}$ B) $\frac{3}{2^{n-1}}$ C) $\frac{3}{2(n-1)}$ D) $\frac{3}{2^n}$ E) $\frac{3}{2n}$

14) La suma de los perímetros de los tres primeros cuadrados (S_3) es:

A) $S_3 = \frac{3}{4}$ B) $S_3 = \frac{1}{4}$ C) $S_3 = \frac{3}{2^3}$ D) $S_3 = \frac{25}{16}$ E) $S_3 = \frac{21}{4}$

15) $\lim_{n\to\infty} S_n$ es igual a:

A) 1 B) 0 C) ∞ D) 7 E) no existe

16) Considera la sucesión $b_n = \frac{n-2}{n+2}$, el $\lim_{n\to\infty} b_n$ es:

A) 2 B) ∞ C) 1 D) no existe E) -1